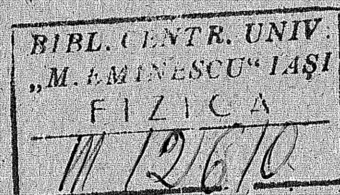
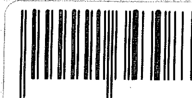


UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA" IAŞI
FACULTATEA DE FIZICĂ
CATEDRA DE OPTICĂ-SPECTROSCOPIE

Gh. N. SINGUREL, M. STRAT,
Dana-Ortansa DOROHOI, A. BRADU

PROBLEME de OPTICĂ

Ediție revăzută și adăugită



EDITURA UNIVERSITĂȚII „ALEXANDRU IOAN CUZA"
IAŞI – 2001

Referenți:

Prof. Dr. **Mihai DELIBAȘ** – Facultatea de Fizică

Lector Drd. **Silviu GURLUI** – Facultatea de Fizică

Autorii exprimă mulțumiri referenților pentru efortul depus și mai ales pentru observațiile utile efectuate.

Tehnoredactarea textului precum și efectuarea figurilor a fost realizată de către

D-l Ing. Petru NISTOR.

Autorii exprimă aleasa lor considerație pentru efortul depus.

CUPRINS

Interferența a două fascicule de radiație optică

1. – Un dispozitiv Young este constituit dintr-o fantă S, ce joacă rolul sursei inițiale și două fante S_1 și S_2 care joacă rol de surse secundare. Cele trei fante sunt liniare, perpendiculare la planul figurii și sunt considerate infint înguste (fig. 1). Fantele S_1 și S_2 se află la distanță egală față de fanta S, iar A reprezintă mijlocul segmentului $S_1S_2 = 2a$. Se observă tabloul de interferență la distanța $AB = D$, care este mare față de distanța $2a$ dintre cele două surse secundare.

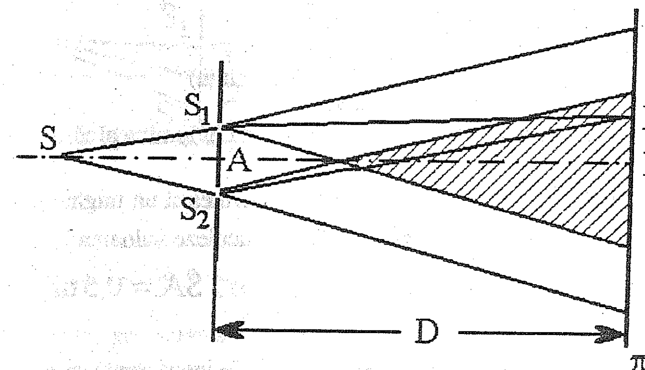


Fig. 1

a) Să se descrie fenomenele implicate în formarea tabloului de interferență observat.

R: Presupunem că fantele S_1 și S_2 sunt foarte înguste. In aceste condiții în spatele ecranului în care sunt practicate fantele se obțin două fascicule difractate. Cu cât lățimea fantelor va fi mai mică, cu atât deschiderea primului maxim de difracție va fi mai mare și cu atât mai mare va fi domeniul de suprapunere al celor două fascicule. Acestea sunt coerente, deci este posibilă observarea figurii de interferență în planul π, în domeniul de suprapunere al fasciculelor.

Să considerăm un punct P în planul π în interiorul domeniului de interferență și să calculăm diferența de drum (δ) între cele două raze ce pleacă din S și interferă în punctul P.

$$\delta = (SS_2 + S_2P) - (SS_1 + S_1P) = S_2P - S_1P$$

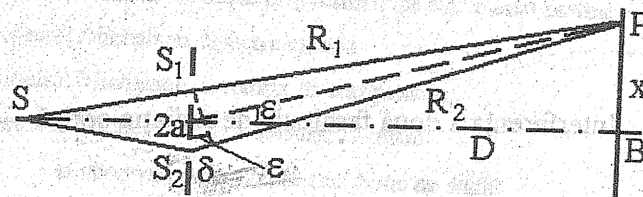


Fig. 2

Dacă diferența de drum δ este suficient de mare, iar mărimile $2a$ și x sunt mici (fig. 2), atunci, într-o aproximație bună, se poate scrie:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2a} = \frac{x}{D}, \text{ de unde: } \delta = \frac{2ax}{D}.$$

Se observă că în punctul B, pentru orice lungime de undă, $\delta(x=0) = 0$, deci franja centrală va fi albă dacă sursa S emite lumină albă.

Dacă $\delta = \lambda$, atunci: $x = i = \dfrac{\lambda D}{2a}$ (interfranja)

Să se descrie aspectul tabloului de interferență în lumină albă.

b) In punctul B se așează un ecran π ce formează un unghi cu direcția SB. Să se descrie tabloul observat pe ecranul π. Să se calculeze valoarea interfranjei i'. Se consideră: $S_1S_2 = 2a = 1\,mm$, $AB = D = 1\,m$, $SA = 0{,}5\,m$, $\alpha = 30^o$ și $\lambda = 500\,nm$.

R: Conform teoriei generale a fenomenului de interferență suprafețele de egală intensitate sunt niște suprafețe hiperbolice de revoluție ($\delta = l_1 - l_2 = ct$). In planul S_1S_2B care intersectează aceste suprafețe hiperbolice, se obțin niște hiperbole (fig. 3). Dacă planul de observare π este înclinat, atunci, după cum rezultă și din fig. 3, mărimea interfranjei se va modifica. Intr-o aproximație suficient de bună se poate scrie:

$$i' = \frac{i}{\sin\alpha} = \frac{\lambda D}{2a\sin\alpha} = 1\,mm, \text{ în timp ce: } i = 0{,}5\,mm$$

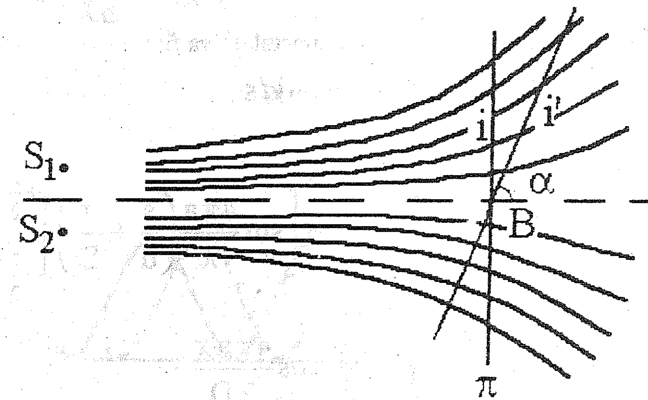


Fig. 3

2. – Menținând fixă lățimea fantelor S_1 și S_2 se mărește progresiv lățimea fantei S, anterior considerată infinit îngustă, la valoarea finită $SS' = s$. Să se descrie tabloul observat dacă lățimea fantei variază în domeniul $0 \div s$.

R: Lățimea fantei S, a cărei valoare este egală cu s (fig. 4), o divizăm în fante foarte înguste de lățime ds. Fiecare fantă infinit

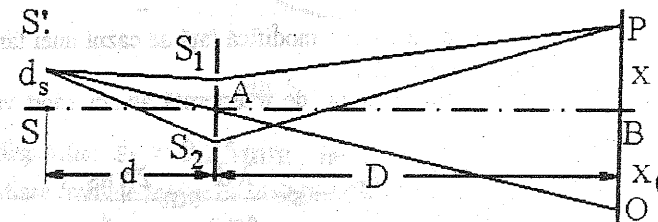


Fig. 4

îngustă, față de vecina ei se comportă ca o sursă incoerentă și-i va corespunde său sistem de interferență, iar interfranjele vor prezenta aceeași lățime $i = \dfrac{\lambda D}{2a}$. Franja centrală împreună cu sistemul de franje corespunzător fantei infinit înguste din S' va fi deplasată față de franja centrală corespunzătoare punctului S cu o mărime egală cu $BO = x_0 = s\dfrac{D}{d}$. In planul π de observare, toate sistemele de franje ce provin de la toate fantele infinit înguste considerate pe lățimea s se suprapun. Intr-un punct P vor

interfera două vibrații de egală amplitudine ce provin de la un element ds al fantei S, având o diferență de drum:

$$\delta = 2a\left(\frac{s}{d}+\frac{x}{D}\right) \text{ și un defazaj: } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta .$$

Pentru elementul ds al fantei S, intensitatea în punctul P va fi:

$$dI \cong 2A^2(1+\cos\varphi)ds ,$$

iar pentru o fantă de lățime s se obține:

$$\frac{I(x)}{I_0} = s + \int_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} \cos\frac{4\pi a}{\lambda}\left(\frac{s}{d}+\frac{x}{D}\right)ds = s + \left[\sin\frac{4\pi a}{\lambda}\left(\frac{s}{d}+\frac{x}{D}\right)\right]_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} =$$

$$= s + \frac{\lambda d}{4\pi a} 2\sin\frac{4\pi as}{\lambda d}\cos\frac{4\pi a x}{\lambda D}$$

Din această relație rezultă că pentru o valoare dată s, intensitatea în planul π prezintă o variație sinusoidală, iar poziția franjelor luminoase este fixată de condițiile:

$$\frac{4\pi a x}{\lambda D} = 2k\pi , \text{ de unde: } x_M = k\frac{\lambda D}{2a} = ki ,$$

iar a celor întunecate de:

$$\frac{4\pi a x}{\lambda D} = (2k+1)\pi , \text{ de unde: } x_m = (2k+1)\frac{i}{2}$$

Deci poziția franjelor luminoase și întunecate nu se modifică față de cazul unei fante S infinit înguste, însă intensitatea acestora este alta.

Să analizăm variația vizibilității tabloului de interferență atunci când variază lățimea fantei S.

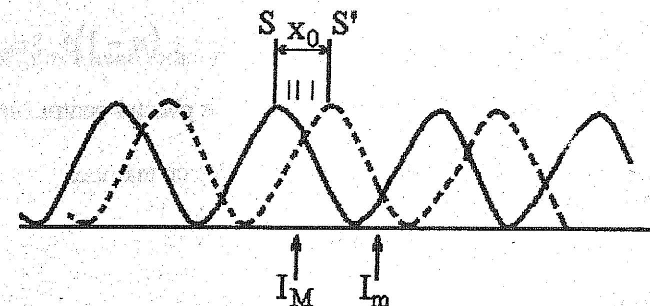
$$\frac{I_M}{I_0} = s + \frac{\lambda d}{4\pi a}\sin\frac{2\pi as}{\lambda d} \text{ și } \frac{I_m}{I_0} = s - \frac{\lambda d}{4\pi a}\sin\frac{2\pi as}{\lambda d} .$$

Deci:
$$V(s) = \frac{I_M - I_m}{I_M} = \frac{\dfrac{2\lambda d}{2\pi a}\sin\dfrac{2\pi as}{\lambda d}}{s + \dfrac{\lambda d}{2\pi a}\sin\dfrac{2\pi as}{\lambda d}} .$$

In fig. 5 sunt prezentate sistemele de interferență obținute de la fantele extreme infinit înguste ale fantei S. Se observă că atunci când valoarea parametrului s crește, vizibilitatea tabloului de interferență scade și dispare când x_0 este egal cu valoarea unei interfranje i și, în general, atunci când $x_0 = ki$. Aceste dispariții succesive sunt

separate de reapariții din ce în ce mai puțin vizibile, tinzându-se spre o iluminare uniformă. Graficul variației vizibilității tabloului de interferență funcție de valoarea deschiderii s a fantei SS' este prezentat în fig. 6. Vizibilitatea franjelor este egală cu zero pentru: $\frac{2\pi as}{\lambda d} = k\pi$, unde $k \neq 0$ (pentru $k = 0$ se obține: $V = 1$), deci:

$$s = k\frac{d}{D}i .$$



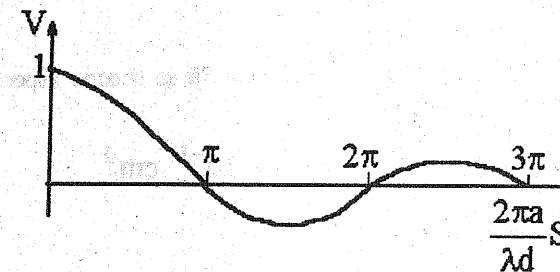


Fig. 5 Fig. 6

Prima dispariție: $s_1 = 0{,}25\,\text{mm}$, iar a doua pentru: $s_2 = 0{,}50\,\text{mm}$. In poziții intermediare franjele reapar cu vizibilități diferite.

3. - Pe traiectoria fasciculului ce provine de la fanta S_1 se introduce o lamă tansparentă de grosime e și indice de refracție n, a cărui valoare depinde de frecvența radiației utilizate (lungimea de undă): $n = f(\lambda)$ (fig. 7).

a) Considerăm că sursa optică emite radiație armonică. Ce modificări ale câmpului de interfernță introduce lama de sticlă? ($e = 10^{-3}\,\text{cm}$, $\lambda = 500\,\text{nm}$ și $n = 1{,}5$).

R: Lama L va întârzia propagarea radiației optice în primul fascicul datorită introducerii drumului optic suplimentar: $\delta' = (n-1)e$.

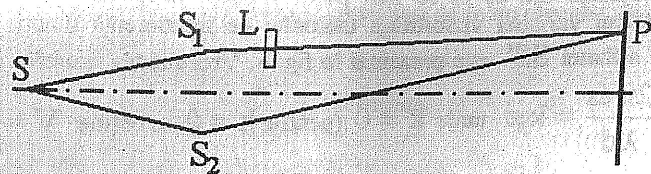


Fig. 7

Diferența de drum: $\delta = SS_2P - SS_1P = \dfrac{2ax}{D} - (n-1)e$. Franja centrală nu se va mai afla în punctul $x = 0$ (unde $\delta = 0$), ci în punctul pentru care $\delta' = 0$, deci: $x_1 = \dfrac{D}{2a}(n-1)e$. Franjele vor fi deplasate în bloc cu mărimea:

$$x_1 = 5\,\text{mm} = 10\,i.$$

Mărimea interfranjei rămâne aceeași: $i = \dfrac{D}{2a} = 0{,}5\,\text{mm}$.

b) Sursa de radiație optică emite lumină albă. Să se descrie aspectul franjei centrale. Se va considera:

$$n = f(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}, \text{ unde } B = 10^{-10}\,\text{cm}^2.$$

R: Deoarece poziția frajei centrale:

$$\delta = 0, \quad x_1 = \frac{D}{2a}(n-1)e = f(\lambda),$$

depinde de lungimea de undă, în lumină albă nu se mai poate considera că franja centrală are culoarea albă. Pozițiile franjelor centrale corespunzătoare frecvențelor diferite nu mai coincid.

Considerând expresia ordinului de interferență: $k = \dfrac{\delta}{\lambda}$, să găsim poziția punctului P pentru care ordinul de interferență nu depinde de lungimea de undă. Această poziție corespunde condiției:

$$\frac{dk}{d\lambda} = \frac{\lambda d\delta - \delta d\lambda}{\lambda^2} = 0,$$

de unde rezultă: $\dfrac{d\delta}{d\lambda} = \dfrac{\delta}{\lambda} = k$. Prin urmare:

$$k = \frac{d\delta}{d\lambda} = -e\frac{dn}{d\lambda} = \frac{2Be}{\lambda^3} = 1{,}14$$

Poziția punctului P este dată de relația:

$$\delta = k\lambda = \frac{2Be}{\lambda^3}\lambda = \frac{2ax'}{D} - (n-1)e, \text{ de unde:}$$

$$x' = \frac{De}{2a}\left(n - 1 + \frac{2B}{\lambda^2}\right)$$

In acest punct toate radiațiile prezintă aceeași diferență de fază.

Oglinzile lui Fresnel. Spectru canelat.

1. - Un sistem de oglinzi Fresnel este reglat astfel încât cele două margini rectangulare ce vin în contact coincid perfect. Se notează cu a și b distanța de la marginile comune ale oglinzilor la fanta de iluminare S, respectiv la ecranul de observare E, iar cu θ - suplimentul unghiului dintre oglinzi. Fanta infinit îngustă S este paralelă cu muchia de intersecție a celor două oglinzi și perpendiculară la planul fig. 8.

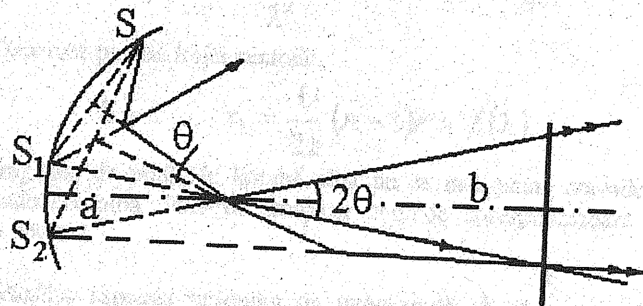


Fig. 8

Să se calculeze numărul de franje ce apar în domeniul de suprapunere a celor două fascicule ($a = b = 1\text{m}$, $\lambda = 550\,\text{nm}$). Să se calculeze valoarea unghiului θ pentru ca pe ecranul de observare să apară 25 franje.

R: Fie S_1 și S_2 imaginile virtuale ale sursei S formate în cele două oglinzi. Din fig. 8 rezultă:

$$\angle S_1AS_2 = 2\theta\text{, deci: } \overline{S_1S_2} \cong 2a\theta.$$

Cele două fascicule (care par a proveni din imaginile virtuale S_1 și S_2) se suprapun în interiorul unghiului diedru cu vârful în A și a cărui deschidere este egală cu 2θ. Lățime câmpul de interferență la distanța b de punctul A este egală cu $2\theta b$. Valoarea interfranjei la distanța $D = a + b$ de cele două surse coerente S_1 și S_2 este:

$$i = \frac{\lambda D}{S_1S_2} = \frac{\lambda}{2\theta}\frac{a+b}{a}.?$$

Franja centrală este luminoasă. Numărul de franje luminoase, de o parte sau de alta a franjei centrale, este egal cu:

$$\frac{\theta b}{i} = 2\theta^2 \frac{ab}{(a+b)\lambda},$$

iar numărul total este:

$$n = 4\theta^2 \frac{ab}{(a+b)\lambda} + 1$$

(se adaugă o frajă care corespunde celei centrale).

Valoarea unghiului θ care corespunde la $n = 25$:

$$4\theta^2 \frac{ab}{(a+b)\lambda} + 1 = 25,$$

de unde: $\theta = 2{,}57 \cdot 10^{-3}\,\text{rad} = 8'50''$. Lățimea unei jumătăți a câmpului de interferență este egală cu:

$$\theta b = 2{,}57 \cdot 10^{-3}\,\text{rad} \cdot 10^3\,\text{mm} = 2{,}57\,\text{mm}.$$

2. - Se iluminează fanta S cu lumină albă, iar în planul E se plasează fanta F a unui spectroscop cu rețea de difracție în așa fel încât aceasta este normală la direcția franjelor de interferență. Să se explice tabloul observat în spectroscop. Înălțimea fantei spectroscopului se consideră mai mare decât limitele domeniului de interferență obținut pe ecranul E. Calculele se vor face pentru $a = b = 1\text{m}$; rețeaua are $200\,\text{tr/mm}$, iar distanța focală a lentilei colimator și a lunetei este egală cu $f = 10\,\text{cm}$; se va considera spectrul de ordinul I, iar limitele spectrului vizibil sunt: $\lambda = (400 \div 800)\text{nm}$.

R: Se lucrează în lumină albă. Pe ecranul E, fiecare radiație armonică λ formează franje luminoase sub forma unor drepte paralele și echidistante. Distanța dintre acestea, adică valoarea interfranjei i, este proporțională cu λ, deci $i_\lambda = B\lambda$. Franja centrală este albă. Următoarele franje sunt irizate: violet în interior și roșu în exterior (fig. 9). Cu cât ne deplasăm față de franja centrală, franjele de diferite lungimi

de undă încep să se suprapună, iar spre marginea câmpului apare "albul de ordin superior". Fanta F a spectroscopului este paralelă cu trăsăturile rețelei de difracție. In lunetă se va observa o imagine centrală F_0, iar de o parte și de alta a imaginii F_0 spectrele F_1, F_1'; F_2, F_2'; F_3, F_3';....(fig. 10). Să atașăm tabloului observat în lunetă

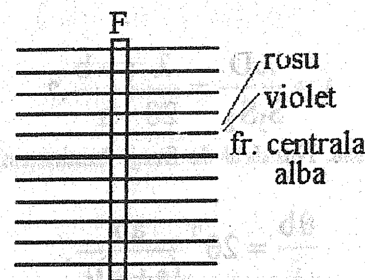


Fig. 9

un sistem de coordonate: x - de-a lungul spectrului și y - de-a lungul imaginii fantei. Imaginea F_0 va reproduce aspectul fantei F, iar mărimea va depinde de grosismentul spectroscopului. Să analizăm spectrul de ordinul întâi F_1. Acesta este constituit din imaginile $F_{1\lambda}$ ale fantei de intrare, corespunzătoare radiației armonice λ. Aceste imagini, față de imaginea centrală F_0, sunt deplasate proporțional cu λ (fig. 11) (de la teoria rețelelor de difracție):

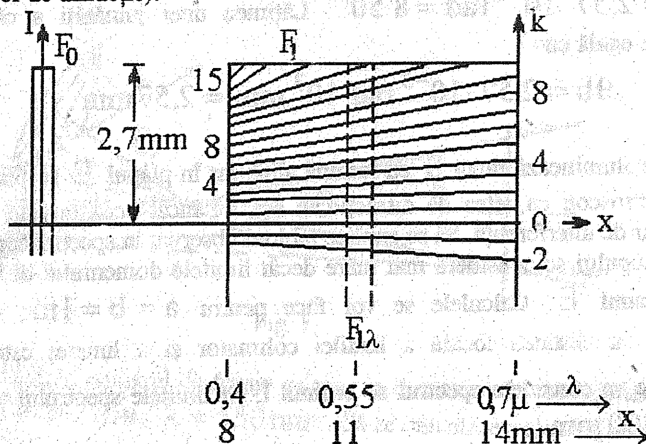


Fig. 10

$$d\sin\alpha = k\lambda, \text{ deci: } \alpha \cong \frac{k}{d}\lambda \text{ (d - constanta rețelei), de unde:}$$

$$x = f\alpha = \frac{fk}{d}\lambda = C\lambda.$$

In interiorul fiecărei imagini F_1 există "puncte luminoase" separate de "puncte întunecate". Distanța dintre "punctele luminoase" reprezintă interfranja $i_\lambda = B\lambda$. Privit în ansamblu spectrul este brăzdat de niște benzi întunecate, care, cu cât ne deplasăm spre marginea câmpului de interferență, prezintă înclinări din ce în ce mai mari față de axa x (fig. 10).

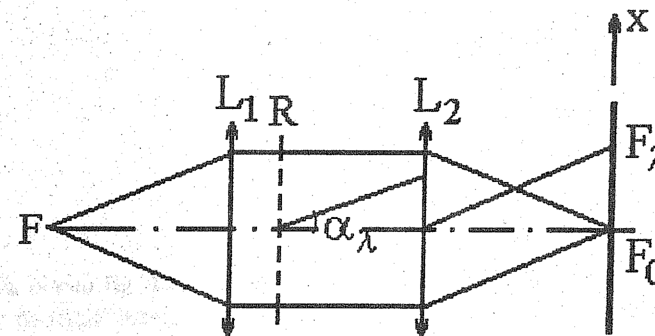


Fig. 11

In interiorul acestui spectru să considerăm radiația de lungime de undă λ', deci: $x' = C\lambda'$, iar în interiorul unei benzi de ordinul k:

$$y' = ki_{\lambda'} = kB\lambda', \text{ prin urmare: } \frac{y}{x} = k\frac{B}{i}\lambda.$$

Deci atât benzile luminoase (descompuse în spectru) cât și canelurile întunecate reprezintă drepte a căror pantă este proporțională cu ordinul de interferență.

Să analizăm tabloul observat în luneta spectrometrului. Radiația $\lambda = 400\,\text{nm}$ va fi dispusă la $8\,\text{mm}$ față de imaginea centrală F_0:

$$x = f\alpha = \frac{fk}{d}\lambda = 8\,\text{mm}.$$

Numărul de benzi luminose: pentru $\lambda = 550\,\text{nm}$, de o parte a franjei centrale s-au găsit 12 benzi luminoase. Diferența de drum optic corespunzătoare marginii câmpului de interferență este:

$$\delta_M = 12 \cdot 550\,\text{nm} = 6600\,\text{nm}.$$

Această diferență de drum optic, pentru $\lambda = 400\,\text{nm}$, permite obținerea a 16 benzi luminoase ($k = \frac{\delta}{\lambda} = 16{,}5$), iar pentru $\lambda = 700\,\text{nm}$ se obțin 9 benzi luminoase.

Deoarece grosismentul spctrometrului $G = \frac{f_2}{f_1} = 1$, înălţimea totală a spectrului este egală cu 5,14 mm.

Să se descrie tabloul observat în luneta spectroscopului dacă elementul de descompunere a radiaţiei optice este o prismă.

Oglinda lui Lloyd

In planul fig. 12 segmentul $AB = 40\,cm$ reprezintă urma feţii superioare a unei lame de sticlă. Această faţă dispusă orizontal, este perfect plană şi reflectizantă; o vom numi "oglinda M", iar în problemă se admite că factorul ei de reflexie, în condiţiile de utilizare (incidenţă aproape razantă), este egal cu unu. O sursă punctiformă de radiaţie optică este plasată la $4\,m$ de marginea A şi la $1\,cm$ deasupra planului oglinzii M. Prin intermediul unei lupe, în planul vertical ce trece prin marginea B, se observă franjele tabloului de interferenţă.

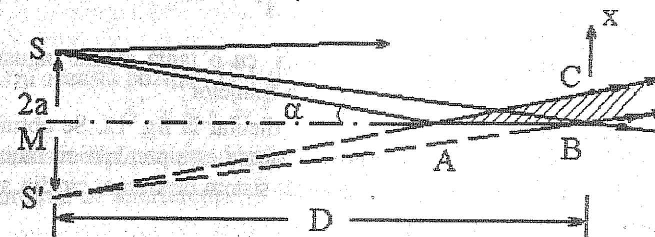


Fig. 12

1. - Să se explice modul de formarea a acestor franje. De ce franja de ordinul zero este întunecată?

R: Franjele sunt rezultatul interferenţei fasciculului direct ce pleacă din S şi a fasciculului obţinut prin reflexie, adică cel ce pare a proveni din sursa virtuală S' (fig. 12). Franja de ordin zero este întunecată deoarece la reflexie pe oglindă, din motive fizice, se introduce o diferenţă de drum suplimentară egală cu $\lambda/2$.

2. - Să se calculeze limitele câmpului de interferență în planul vertical ce trece prin B.

R: $\tan\alpha = \dfrac{MS}{MA} = \dfrac{CB}{AB}$; $x_M = CB = 1\,\text{mm}$.

3. - Să se calculeze valoarea interfranjei și numărul de franje luminoase conținute de tabloul de interferență, dacă se utilizează radiația armonică $\lambda = 500\,\text{nm}$.

R: $$i = \frac{D}{2a}\lambda = 0{,}11\,\text{mm}.$$

Numărul de interfranje: $\dfrac{BC}{i} = \dfrac{1}{0{,}11} = 9\dfrac{1}{100}$, deci se obțin 9 franje negre plus franja centrală neagră, despărțite de 9 franje luminoase.

4. - Punctul sursă S se îndepărtează la infinit pe direcția AS. Să se analizeze cum se modifică interfranja?

R: $$i = \frac{AB + AM}{SS'}\lambda = \frac{\frac{AB}{AM}+1}{\frac{SS'}{AM}}\lambda \to i_m = \frac{\lambda}{2\alpha} = 0{,}1\,\text{mm};$$

(valoarea interfranjei se micșorează și tinde la valoarea i_m).

5. - Se înlocuește sursa punctiformă S cu o fantă infinit îngustă F. Cum trebuie orientată fanta pentru a crește intensitatea franjelor?

R: Fanta trebuie să fie orientată perpendicular la fig. 12. Se obțin franje mult mai strălucitoare. Fiind perpendiculară la figură, fanta este paralelă cu muchia oglinzii. Fiecărui punct al fantei îi va corespunde propriul sistem de franje, iar din suprapunerea acestora va rezulta creșterea intensității.

6. - Se iluminează fanta cu lumină albă. Care este aspectul câmpului în vecinătatea punctului B?

R: Franja centrală va fi neagră (acromatică) deoarece pentru fiecare frecvență, la reflexie, se introduce $\dfrac{\lambda}{2}$. Deoarece: $i = \dfrac{D}{2a}\lambda$, prima franjă luminoasă va fi irizată în violet spre interior și roșu spre exterior. În ceea ce privește următoarele franje, cu cât crește ordinul de interferență începe să se manifeste suprapunerea franjelor de diferite ordine și de diferite frecvențe. Culorile încep să dispară și apare albul de ordin superior (fig. 13).

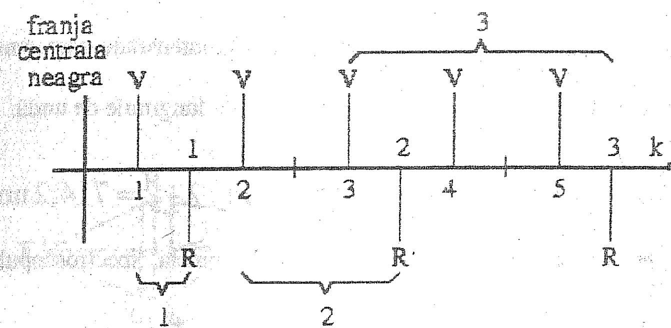


Fig. 13

7. - Intr-un plan vertical ce trece prin punctul B, deasupra acestuia, se așează, paralel cu franjele, fanta F' a unui spectroscop; distanța $BF' = 0{,}55\,\text{mm}$. Să se calculeze lungimea de undă a canelurilor întunecate ce apar în spectrul vizibil $\lambda = (400 \div 800)\,\text{nm}$.

R: Considerăm fanta spectroscopului infinit îngustă. Să calculăm cum apare interferența diferitelor radiații în locul unde este plasată fanta F'. Valoarea interfranjei pentru radiația $\lambda = 500\,\text{nm}$ este $i_g = \dfrac{D}{2a}\lambda = 0{,}11\,\text{mm}$. Pe intervalul $BF' = 0{,}55\,\text{mm}$ există: $n = \dfrac{BF'}{i_g} = 5$ franje negre exceptând franja centrală neagră.

Pentru această poziție (F') diferența de drum este egală cu:

$$\delta' = k\lambda = 5 \cdot 500\,\text{nm} = 2500\,\text{nm}.$$

Pentru aceeași poziție, deci pentru aceeași diferență de drum, pentru λ_v va corespunde ordinul de interferență:

$$\lambda_v = 400\,\text{nm}, \quad k = \frac{2500\,\text{nm}}{400\,\text{nm}} = 6\frac{1}{4},$$

iar pentru: $$\lambda_v = 800\,\text{nm}, \quad k = 3\frac{1}{8}.$$

Intre aceste limite extreme, în poziția F', corespunzător ordinelor de interferență $k = 4{,}5{,}6$, trei radiații vor prezenta minim de interferență (deci vor lipsi din spectrul observat în spectroscop).

Din relația: $\delta = k\lambda$ se poate calcula valoarea acestor lungimi de undă:

$$\lambda_6 = \frac{\delta}{k} = \frac{2500}{6} = 416{,}6\,\text{nm};\ \lambda_5 = 500\,\text{nm};\ \lambda_4 = 625\,\text{nm}.$$

Intre aceste caneluri întunecate apar maximele de intensitate corespunzătoare ordinelor de interferență: $5\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ care corespund la lungimile de undă:

$$\lambda_{5,5} = \frac{2500}{5,5} = 454,5\,\text{nm}, \ \lambda_{4,5} = 555,5\,\text{nm}, \ \lambda_{3,5} = 714,2\,\text{nm}.$$

Distribuția intensității în tabloul observat în luneta spectroscopului este prezentată în fig. 14.

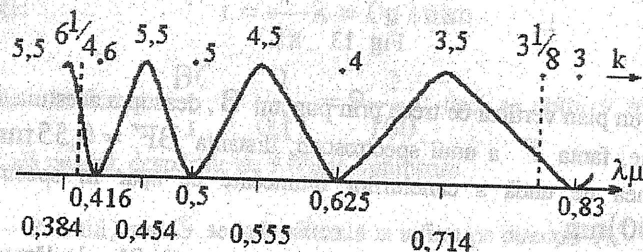


Fig. 14

8. - In locul fantei F se așează fanta unui spectrograf cu rețea, care este iluminată cu lumină albă. Rețeaua R are $25\,\text{tr/mm}$ și este dispusă normal pe FA, între două lentile L_1 și L_2 a căror distanță focală este egală cu $50\,\text{cm}$, iar distanța L_1L_2 este neglijabilă. O diafragmă D se află la $3\,\text{m}$ față de marginea A și este traversată numai de razele difractate ale spectrului de primul ordin care se formează deasupra planului orizontal al oglinzii M. Deschiderea lentilelor este suficientă pentru ca razele tuturor fasciculelor armonice difractate să acopere în întregime oglinda M. Să se descrie aspectul câmpului de interferență.

R: Diafragma D limitează spectrul de ordinul întâi: violet în partea inferioară și roșu în partea superioară. Se poate considera că fiecare punct al fantei este o sursă de radiație armonică și totodată sursă de lumină pentru oglinda Lloyd. Să calculăm poziția acestor surse armonice față de axa FA.

Din relația fundamentală a rețelei de difracție:

$$\sin i + \sin i' = kn\lambda,$$

(în cazul de față: $i' = 0$, $k = 1$), se obține: $\sin i = n\lambda$ (pentru $\lambda = 500\,\text{nm}$ se obține: $\sin i = 12,5 \cdot 10^{-3}$, deci se poate aproxima $\sin i \cong i$). Din fig. 15 rezultă:

$$a = f\tan i \cong fn\lambda,$$

deci mărimea a este proporțională cu lungimea de undă.

Să calculăm poziția x a unui maxim de intensitate de ordinul k în planul de interferență ce trece prin B. Diferența de drum este:

$$\delta = \frac{x}{D}2a = \frac{x}{D}2fn\lambda.$$

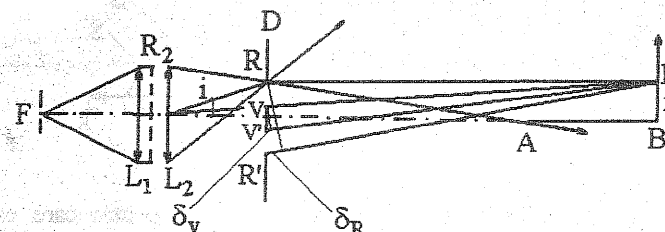


Fig. 15

Pentru un punct P din tabloul de interferență, diferența de drum a radiațiilor de diferite frecvențe ce provin de la sursele armonice dispuse pe deschiderea fantei este proporțională cu λ.

$$\delta = \frac{x}{D}2a = \frac{x}{D}2fn\lambda = k\lambda, \text{ de unde: } x = \frac{kD}{2fn},$$

adică poziția unui maxim de interferență nu depinde de lungimea de undă. Valoarea interfranjei este:

$$i = \frac{D}{2fn} = 0,136\,\text{mm}.$$

Se obțin franje acromatizate (albe – ne irizate pe margini).

9. - Se consideră montajul anterior, dar cu două fante infinit înguste și paralele S și S' care constituie surse necoerente, cu aceeași valoare a intensității. Fantele se află în același plan, dispus vertical față de oglindă și situate la distanța a_0 și $a_0 + \varepsilon$ față de planul oglinzii. Fantele sunt iluminate cu radiația armonică $\lambda = 500\,\text{nm}$.

Să se descrie aspectul câmpului de interferență.

R: Fiecare din sursele S și S' crează propriul lor sistem de interfranje. Cele două sisteme se suprapun în planul de observare, iar intensitățile se adună. In punctul B se va obține o franjă întunecată. Să analizăm suprapunerea franjelor.

$$i = \frac{D}{2a_0}\lambda \rangle i' = \frac{D}{2(a_0+\varepsilon)}\lambda.$$

Cu cât ne depărtăm de franja centrală, vizibilitatea franjelor se micșorează până când se obține o iluminare uniformă în jurul poziției când o franjă luminoasă a unui sistem se suprapune peste o franjă întunecată a celuilalt sistem; apoi vizibilitatea crește din nou, devenind maximă când o franjă luminoasă a lui S coincide cu o franjă luminoasă a lui S' (fig. 16). Fenomenul este periodic.

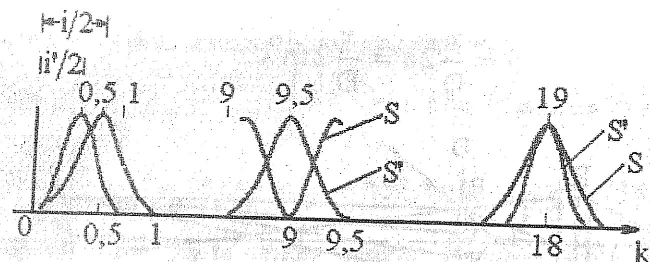


Fig. 16

b) Să se determine cea mai mică valoare a lui ε pentru care există o coincidență între a 10-a franjă neagră (considerând și franja centrală) dată de fanta S și o franjă luminoasă dată de fanta S'.

R: Se alege valoarea ε în așa fel încât în întreg câmpul de interferență să putem constata numai o diminuare a clarității urmată de o iluminare uniformă. A 10-a franjă neagră corespunzătoare fantei S se află față de oglindă la o distanță de:

$$x = 9i = 9\frac{D}{2a_0}\lambda$$

(se consideră valoarea 9 deoarece franja centrală este notată cu zero). Pentru a 9-a franjă luminoasă, corespunzătoare sursei S', se obține:

$$x = 9{,}5i' = 9{,}5\frac{D}{2(a_0+\varepsilon)}\lambda.$$

Pentru a obține coincidența este necesar ca:

$$9\frac{D}{2a_0}\lambda = \frac{19}{2}\frac{D}{2(a_0+\varepsilon)}\lambda, \text{ deci: } \varepsilon = \frac{a_0}{2\cdot 9} = 0{,}555\,\text{mm}.$$

Dispariția franjelor în tabloul de interferență (deci iluminare uniformă) se va obține dacă:

$$x = \underbrace{m\frac{D}{2a_0}\lambda}_{\text{negru}(S)} = \underbrace{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{D}{2(a_0+\varepsilon)}\lambda}_{\text{iluminat}(S')}, \text{ unde: } n \geq m\,;\ p = n-m \geq 0,$$

de unde:

$$\frac{2m}{a_0} = \frac{2n+1}{a_0+\varepsilon} = \frac{2(n-m)+1}{\varepsilon}, \text{ deci: } \varepsilon = \frac{2p+1}{2m}a_0,$$

pentru $n = m$, $p = 0$, deci: $\varepsilon = \dfrac{a_0}{2m}$ (în cazul datelor problemei numărul m nu poate fi mai mic decât 9).

c) Care este legea de repartiție a iluminărilor pentru fiecare din cele două sisteme de franje date de sursele S și S'?

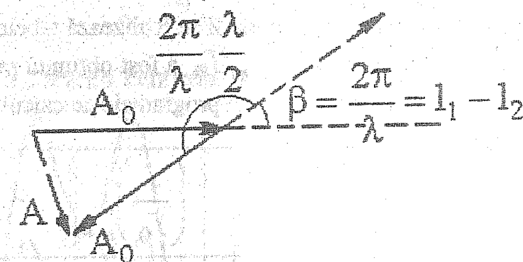


Fig. 17

R: Pentru sursa S variația intensității în planul ce trece prin punctul B este dată de compunerea amplitudinilor radiației ce provine de la sursa S și imaginea acesteia S'. Într-un punct de coordonată x a acestui plan se vor compune vectorii A_0 defazați cu unghiul φ, care depinde de poziția x (se consideră și diferența de drum suplimentară $\lambda/2$ introdusă la reflexie) (fig. 17).

Unghiul de defazaj: $$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(l_1 - l_2 + \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{2\pi x}{i}$$

Deci: $$A^2 = A_0^2 + A_0^2 + 2A_0^2\cos\varphi = 4A_0^2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

De unde: $$\left(\frac{I}{I_0}\right)_S = 4\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

unde: $$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{2ax}{D} = \frac{2\pi x}{i}.$$

Pentru radiația ce provine de la sursa S' distribuția intensității este dată de aceeași relație, iar: $\varphi' = \dfrac{2\pi x}{i'}$.

d) Să se determine distribuția iluminării în planul de interferență ce trece prin punctul B, dacă cel două fante sunt dispuse în așa fel încât $\varepsilon = a_0$.

R: Pentru fanta S: $i_S = \dfrac{D}{2a}\lambda$; $\left(\dfrac{I}{I_0}\right)_S = 4\sin^2\dfrac{\varphi}{2} = 4\sin^2\dfrac{2\pi x}{i}$;

Pentru fanta S': $i_{S'} = \frac{D}{4a}\lambda = \frac{i_S}{2}$; $\left(\frac{I}{I_0}\right)_{S'} = 4\sin^2\frac{\varphi}{2} = 4\sin^2\frac{\pi x}{i'}$;

Pentru a determina distribuţia iluminării se realizează tabelul următor ale cărui date sunt prezentate în fig. 18, iar curba I_{rez}/I_0 a fost obţinută prin adunare grafică. Se va efectua aceeaşi operaţie folosind unul din programele de calcul din laborator.

	$\left(\frac{I}{I_0}\right)_S$	x	$\left(\frac{I}{I_0}\right)_{S'}$	x
$\pi/12$	0,067	$i/12$	1/4	$i'/6$
$\pi/6$	1/4	$i/6$	3/4	$i'/3$
$\pi/4$	1/2	$i/4$	1	$i'/2$
$\pi/3$	3/4	$i/3$	3/4	$2i'/3$
$5\pi/12$	0,92	$5i/12$	1/4	$5i'/6$
$\pi/2$	1	$i/2$	0	i'
$7\pi/12$	0,92	$7i/12$		
$2\pi/3$	3/4	$2i/3$		
$3\pi/4$	1/2	$3i/4$		
$5\pi/6$	1/4	$5i/6$		
	0	i		

10. - Revenim la montajul cu o singură fantă S infinit îngustă iluminată cu radiaţie armonică. Se fixează prima franjă neagră, vecină cu franja centrală (ordinul ei de interferenţă este $3/2$). Se deschide apoi fanta spre "în sus"; lărgimea ei este s şi este iluminată uniform. Să se determine lărgimea minimă a fantei, pentru care iluminarea în punctul unde era franja neagră devine egală cu iluminarea medie a câmpului. Aceeaşi problemă dacă se fixează franja neagră de ordinul: $k+\frac{1}{2}$ $(k = 1,2,3,\cdots)$.

R: Să descompunem fanta de lăţime finită într-o infinitate de fante elementare, paralele, de aceeaşi lăţime da şi situate la distanţa a de planul oglinzii (fig. 19); fiecărei fante elementare îi corespunde propriul sistem de franje de interferenţă. Iluminarea într-un punct al câmpului de interferenţă va fi dată de suma iluminărilor

corespunzătoare fiecărui sistem de franje. Pentru o fantă elementară, în punctul M, diferenţa de drum optic este: $\delta' = \frac{2ax}{D}$. Amplitudinea rezultantă (pe unitate de lungime):

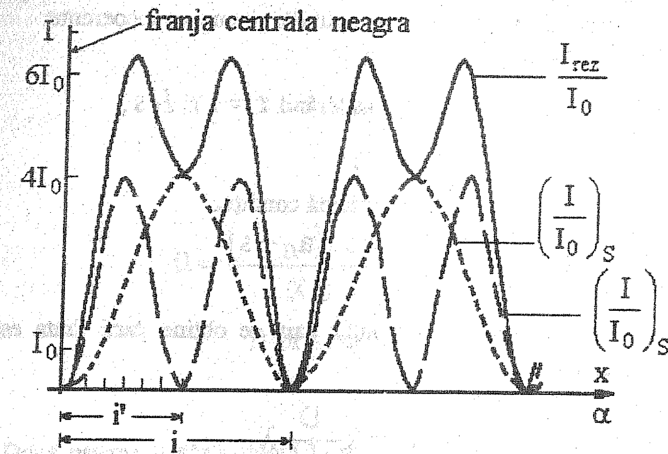


Fig. 18

$$A = 2\sqrt{I_1 da}\sin\frac{\beta}{2};\ \text{unde: } \frac{\beta}{2} = \frac{2\pi a x}{D},\ \text{deci: } dI = 4I_1\sin^2\frac{2\pi a x}{D\lambda}da.$$

Intensitatea în punctul M determinată de întreaga deschidere (s) a fantei este:

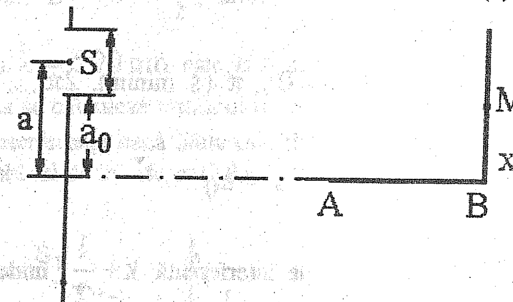


Fig. 19

$$I = 2I_1\int_{a_0}^{a_0+s}\left(1-\cos\frac{4\pi a x}{D\lambda}\right)da = 2I_1 s - 2I_1\frac{D\lambda}{4\pi x}\sin\frac{4\pi a x}{D\lambda}\Bigg|_{a_0}^{a_0+s} =$$

$$= 2I_1 s\left[1-\frac{D\lambda}{2\pi s x}\sin\frac{2\pi s x}{D\lambda}\cos\frac{2\pi s x(2a_0+s)}{D\lambda}\right]$$

(intensitatea în planul de interferență funcție de poziția punctului M și de mărimea deschiderii fantei). Se observă că atunci când $s \to 0$ se obține $I \to 0$, iar când $x \to 0$, se obține $I \to 0$, oricare ar fi valoarea mărimii s.

Considerăm că iluminarea medie este cea care rezultă din suprapunerea (sumarea) fasciculelor incident și reflectat pe oglindă, presupuse incoerente:

Intensitatea fasciculului incident: $I_1 s$

Intensitatea fasciculului reflectat (considerând $r = 1$): $I_1 s$,

Deci:
$$\bar{I} = 2I_1 s.$$

Problema cere ca: $I = \bar{I}$, deci trebuie satisfăcută condiția:

$$\sin\frac{2\pi s x}{D\lambda}\cos\frac{2\pi s x(a_0+s)}{D\lambda} = 0.$$

Considerăm poziția franjei negre de ordinul k care se obține dacă fanta este infinit îngustă și se află în poziția a_0:

$$x = ki = k\frac{D}{2a_0}\lambda.$$

Pentru această valoare a poziției x, condiția de mai sus devine:

$$\sin\frac{k\pi s}{a_0}\cos\frac{k\pi s}{a_0} = 0, \text{ sau: } \frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi s}{a_0} = 0.$$

Din această relație se obține valoarea minimă a lățimii fantei. Pentru prima franjă neagră $k = 1$ (franja centrală neagră este $k = 0$):

$$\frac{2\pi s}{a_0} = 0 \text{ (caz banal: } s = 0\text{)}, \ \pi \ (s \text{ minim}), \ 2\pi, \ldots$$

Deci:
$$s_{min} = \frac{a_0}{2}, \ s = a_0, \ldots$$

Pentru cazurile: $k = 2,3,4,\cdots$ (ordinul de interferență $k+\frac{1}{2}$, unde termenul $1/2$ apare de la diferența de drum suplimentară $\lambda/2$) se obține:

$$s = \frac{a_0}{2k}.$$

Biprisma lui Fresnel

Două prisme, a căror unghi la vârf este foarte mic $\alpha = 20'$, sunt unite prin bazele lor și iluminate prin intermediul unei fante situată pe axa optică a sistemului la distanța $a = 10\,cm$ de prisme, de o sursă de radiație optică. Franjele de interferență se observă pe un ecran perpendicular la axa optică, situat la distanța $L = 3\,m$ față de fantă (fig. 20). Indicele de refracție al materialului prismei depinde de lungimea de undă conform relației: $n = A + \frac{b}{\lambda^2}$, unde $b = 10^{-10}\,cm^2$, iar valoarea indicelui de refracție pentru $\lambda = 500\,nm$ este $n = 1{,}5$.

1. - Să se calculeze numărul de franje luminoase și întunecate ce se formează în tabloul de interferență dacă fanta este iluminată cu câmpul armonic $\lambda = 500\,nm$. Să se descrie tabloul de interferență dacă fanta este iluminată cu lumină albă.

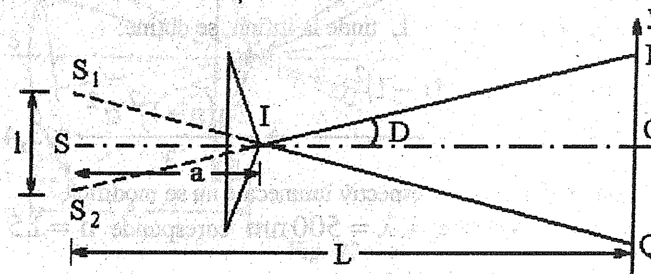


Fig. 20

R: Pentru început să considerăm că valoarea grosimii bazei prismelor este neglijabil de mică. De asemenea considerăm că prismele sunt stigmatice, iar imaginile S_1 și S_2 se află față de prismă la aceeași distanță ca și fanta S. Intr-o aproximație foarte bună se poate scrie:

$$S_1I = SI = S_2I = a.$$

Deoarece unghiul $\alpha = 20' = \frac{\pi}{3\cdot 180} = 5{,}8\cdot 10^{-3}\ \text{rad}$ este foarte mic, din relația:

$$n = \frac{\sin\frac{\alpha + D}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$ se obține: $D = (n-1)\alpha = \frac{\pi}{6\cdot 180}$; distanța dintre sursele virtuale este:

$$l = S_1S_2 = 2aD = 2a(n-1)\alpha,$$

valoarea interfranjei: $$i = \frac{L\lambda}{2a(n-1)\alpha} = 2{,}58\,\text{mm},$$

iar valoarea semilățimii câmpului de interferență este:

$$OP = (L-a)D = (L-a)(n-1)\alpha = 8{,}43\,\text{mm}.$$

Numărul de franje dispuse pe acest interval este egal cu: $\frac{OP}{i} = 3{,}26$, iar numărul total de franje luminoase este:

$$2\left|\frac{2a(L-a)(n-1)^2\alpha^2}{L\lambda}\right| + 1\,(\text{franja centrală}) = 7,$$

respectiv 6 franje întunecate.

Dacă valoarea parametrului L tinde la infinit, se obține:

$$\frac{OP}{i} = \frac{2aL\left(1-\frac{a}{L}\right)(n-1)^2\alpha^2}{L\lambda} \to \frac{2a(n-1)^2\alpha^2}{\lambda} \cong 3{,}4,$$

deci numărul de franje luminoase, respectiv întunecate nu se modifică.

In lumină albă: deoarece la $\lambda = 500\,\text{nm}$ corespunde $n = 1{,}5$, din relația $n = A + \frac{b}{\lambda^2}$, unde $b = 10^{-10}\,\text{cm}^2$, se obține $A = 1{,}1$, de unde:

$$\Delta n = n_V - n_R = 1{,}162 - 1{,}115 = 0{,}047$$

(deci dispersia materialului are un rol neglijabil).

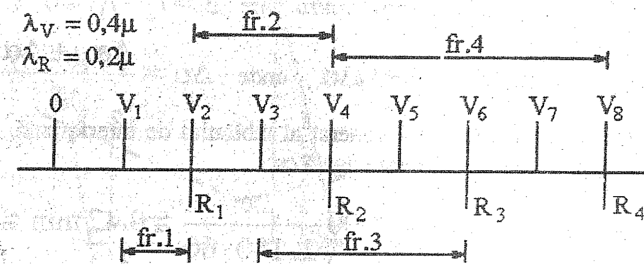


Fig. 21

In aceste condiții interfranja: $i = \frac{L\lambda}{2a(n-1)\alpha}$ este proporțională cu lungimea de undă. Franja centrală este albă. Marginile următoarelor franje sunt irizate în interior în violet iar spre exterior în roșu (fig. 21).

Dacă $\lambda_V = 400\,\text{nm}$ și $\lambda_R = 800\,\text{nm}$ atunci cea de a doua franjă atinge pe prima, și anume λ_{R_1} coincide cu λ_{V_2}. Cea de a doua franjă este și mai puternic irizată față de prima. Cea de a treia franjă, care este și mai irizată, se suprapune peste a doua. Pentru franje de ordin superior suprapunerea este din ce în ce mai puternică și se obține *albul de ordin superior*.

2. - Cele două prisme nu sunt riguros identice: unghiul la vârf al prismei superioare este $\alpha_1 = 19'$, iar pentru cealaltă $\alpha_2 = 21'$. Să se analizeze dacă fenomenul diferă de cel descris la punctul anterior.

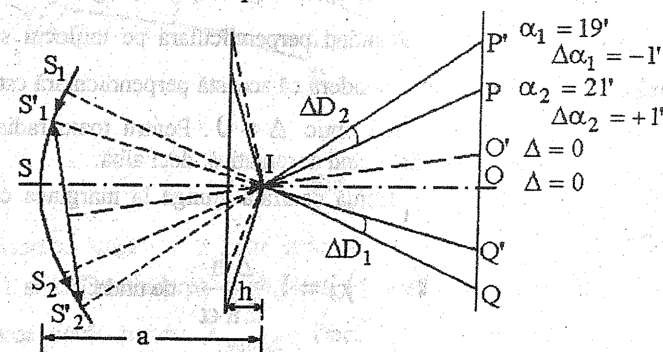


Fig. 22

R: Deoarece valoarea α_1 se micșorează, imaginea S_1 se deplasează pe un cerc cu raza $a + (n-1)h$, rotindu-se cu unghiul $\Delta D_1 = (n-1)\Delta\alpha_1$; valoarea unghiului α_2 crește, imaginea S_2 se deplasează pe același cerc cu unghiul

$\Delta D_2 = (n-1)\Delta\alpha_2$ (fig. 22). Planul pentru care $\Delta = l_2 - l_1 = 0$ se rotește în jurul punctului I cu unghiul $(n-1)\Delta\alpha$, unde $\Delta\alpha = \frac{\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2}{2}$ (franja centrală), însă nu se modifică aspectul general al tabloului de interferență. Deplasarea franjei centrale în planul de observare este egală cu:

$$OO' \cong (L-a)(n-1)\Delta\alpha = 2900\frac{\pi}{2\cdot 180\cdot 60} \cong 0{,}42\,mm \cong \frac{i}{6}.$$

3. Se utilizează o sursă de lumină albă. Cele două prisme prezintă același unghi α, dar au grosimi diferite la bază $h_1 \rangle h_2$. Să se calculeze diferența de grosime tolerabilă a bazei prismelor pentru ca raza corespunzătoare ordinului de interferență zero să rămână în câmpul de interferență. Să se descrie aspectul câmpului de interferență.

R: Pentru o radiație armonică oarecare λ, dacă crește grosimea h_1 la bază, imaginea S_1 se deplasează pe direcția S_1IQ cu mărimea: $(n-1)\Delta h$ (în primă aproximație, în porțiunea suplimentară de prismă egală cu Δh, considerăm parcursul oblic)(fig. 23). Unghiul D rămâne neschimbat. Segmentul $S_1'S_2$ se rotește în jurul punctului S_2 cu unghiul:

$$\angle S_1S_2S_1' \cong \frac{S_1S_1'}{S_1S_2} = \frac{\Delta h(n-1)}{2a\alpha(n-1)} = \frac{\Delta h}{2a\alpha},$$

unghi ce este independent de λ. Perpendiculara pe mijlocul segmentului S_1S_2 se rotește cu același unghi $S_1S_2S_1'$, rămânând perpendiculară pe mijlocul segmentului $S_1'S_2$. In primă aproximație se poate considera că această perpendiculară este conținută în planul pentru care diferența de drum optic $\Delta = 0$. Pentru toate radiațiile franja centrală se rotește cu același unghi, rămânând acromatică, deci albă.

Dacă crește grosimea Δh, franja centrală ajunge la marginea câmpului de interferență dacă:

$$OP = (L-a)(n-1)\alpha = L\frac{\Delta h}{2a\alpha}, \text{ de unde:}$$

$$h = 2a\alpha^2(n-1)\frac{L-a}{L} = 3{,}262\mu \text{ (pentru } \lambda = 500\,nm,\ n = 1{,}5\text{)}.$$

In cazul biprismei Fresnel, câmpul de interferență este determinat de domeniul de suprapunere a celor două fascicule coerente, iar deschiderea unghiulară a domeniului este determinată de unghiul de deviație (fig. 24).

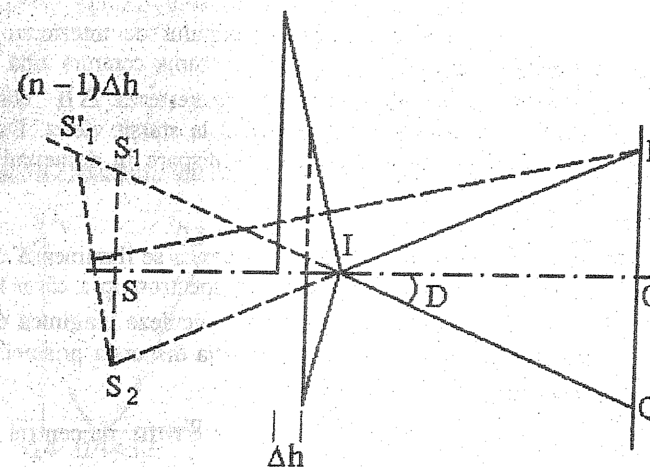


Fig. 23

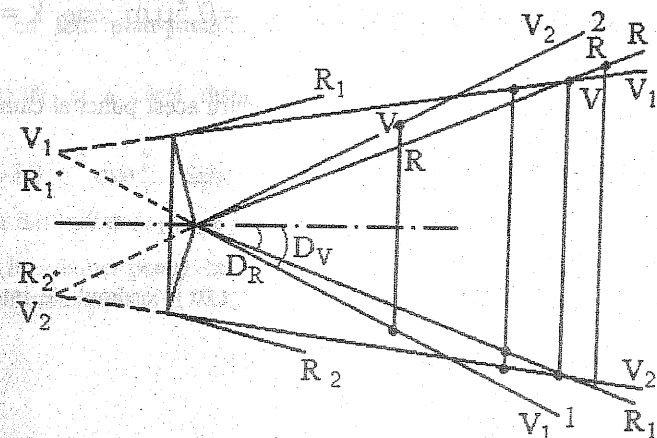


Fig. 24

Deoarece unghiul α este mic, domeniul de suprapunere este limitat de fasciculele 1 și 2. Deschiderea unghiulară a domeniului de interferență pentru λ_{rosu} este mai mică decât pentru λ_{violet}. Dacă datorită creșterii grosimii Δh a unei prisme, franja centrală albă, acromatizată, depășește limita domeniului de interferență pentru λ_{rosu} (unghiul α mic), nu se mai produce fenomenul de interferență deoarece cele două fascicule coerente λ_R nu se mai suprapun. In punctele exterioare domeniului de interferență este prezent numai un sfert din intensitatea maximă a radiației λ_{rosu}

din domeniul de interferenţă, intensitate ce provine de la o singură sursă. Acelaşi fenomen are loc atunci când se depăşesc limitele câmpului de interferenţă pentru celelalte radiaţii. In condiţiile de mai sus, dacă urmărim franja centrală albă la limita câmpului de interferenţă în deplasarea ei determinată de creşterea Δh, observăm o diminuare treptată a culorilor în ordinea: roşu, galben şi la sfârşit violet. Deci franja centrală va căpăta treptat o tentă violetă, înainte de a dispare în domeniul uniform luminat.

4. Să considerăm din nou prismele identice. Acestea se iluminează cu lumină albă, iar după ele, în planul de observare, se aşează un spectroscop a cărui fantă este dispusă paralelă cu franjele la $8\,mm$ de centru. Să se calculeze lungimea de undă a caneluriior negre şi luminoase ale spectrului. Se va neglija dispersia prismei. Spectrul vizibil se consideră cuprins între $(400 \div 800)\,nm$.

R: Fanta spectroscopului se află la distanţa $y = 8\,mm$ de centrul O, unde $\delta = 0$. Fanta se află în interiorul câmpului de interferenţă deoarece $OP = 8{,}35\,mm$. Fanta se află în interiorul câmpului de interferenţă deorece $OP = 8{,}35\,mm$. Ordinul de interferenţă pentru $\lambda = 0{,}5\mu m$ este $k = \frac{y}{i}$, iar diferenţa de drum optic este $\Delta = \frac{y}{i}\lambda$. Prin urmare pentru acest punct al câmpului de interferenţă diferenţa de drum optic este:

$$\Delta = \frac{8\,mm}{2{,}58\,mm} 0{,}5\mu m = 1{,}5514\mu m.$$

Pentru acelaşi punct, pentru radiaţia violetă $(\lambda = 0{,}5\mu m)$, ordinul de interferenţă este: $\frac{1{,}55}{0{,}4} = 3{,}8$, iar pentru radiaţia roşie: $\frac{1{,}55}{0{,}8} = 1{,}9$.

Deci în spectru vom găsi:

- două caneluri luminoase: $k = 2,3,\cdots (\Delta = k\lambda$ - maxime)

$$\frac{1{,}5514\mu m}{2} = 0{,}7757\mu m \text{ şi } \frac{1{,}5514\mu m}{3} = 0{,}5171\mu m;$$

- două caneluri întunecate: $p = 2{,}5; 3{,}5$

$$\left(\Delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda = p\lambda \text{ - minime}\right)$$

$$\frac{1{,}5514\mu m}{2{,}5} = 0{,}6205\mu m \text{ şi } \frac{1{,}5514\mu m}{3{,}5} = 0{,}44\mu m.$$

Distribuţia intensităţii în spectrul "alb de ordin superior" se poate calcula după relaţia (fig. 25):

$$\frac{I}{I_0} = \cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}, \text{ unde: } \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta l$$

(pentru punctul considerat din câmpul de interferenţă: $\Delta l = 1{,}5514\mu m$).

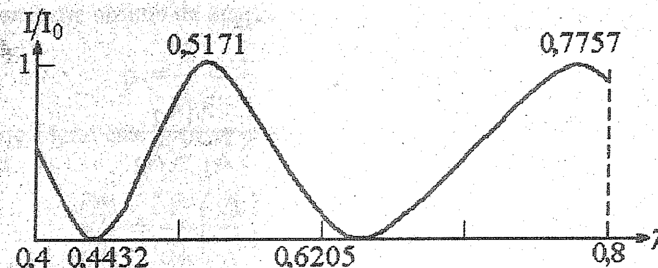


Fig. 25

5. Se înlătură spectroscopul, iar pe una din cele două prisme se lipeşte o lamă de sticlă cu feţe plan-paralele a cărei indice de refracţie este $n = 1{,}6$ pentru $\lambda = 0{,}5\mu m$ şi a cărei dispersie este descrisă de relaţia: $n = A + \frac{b}{\lambda^2}$, unde $b = 2{,}6 \cdot 10^{-10}\,cm^2$. Sistemul se iluminează cu radiaţia galbenă a sodiului, constituită din radiaţiile $\lambda_1 = 0{,}5890\mu m$ şi $\lambda_2 = 0{,}5896\mu m$. Să se calculeze grosimea h a lamei pentru ca franjele de interferenţă să dispară în punctul O de pe axa optică a sistemului (fig. 26).

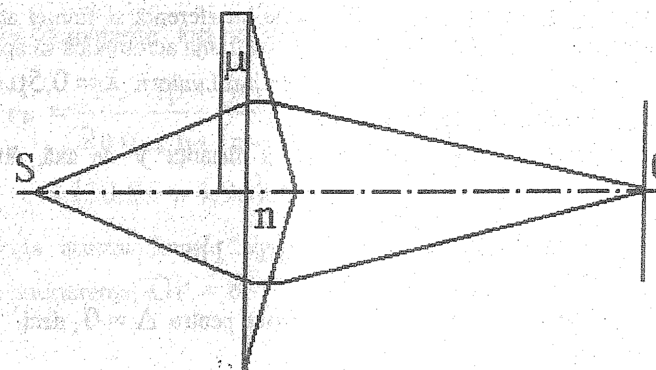


Fig. 26

R: In lipsa lamei, în punctul O, diferenţa de drum optic era egală cu $\Delta = 0$. In prezenţa lamei, în acelaşi punct, $\Delta = (n-1)h$, iar franja centrală de ordin zero se

deplasează în sus. In câmpul de interferență apar doua sisteme de franje corespunzătoare celor doua radiații.

Dacă: $\Delta=(n-1)h=k\lambda_1=\left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda_2$,

atunci câmpul de interferență în punctul O va apare uniform iluminat (franjele luminoase λ_1 coincid cu cele intunecate λ_2). De unde:

$$(n-1)h=\frac{k+\frac{1}{2}}{\frac{1}{\lambda_2}}=\frac{k}{\frac{1}{\lambda_1}}=\frac{1}{2}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$$

(pentru un anumit ordin de interferență k).

Deoarece pentru $\lambda=0{,}5\mu m$, $n_\lambda=1{,}6=A'+\frac{2{,}6\cdot10^{-10}\,cm^2}{25\cdot10^{-10}\,cm^2}$, se obține: $A'=1{,}496$, pentru $\lambda=0{,}589\mu m$ rezultă $n_\lambda=1{,}571$.

Deci:

$$h=\frac{1}{2}\frac{\lambda_1\lambda_2}{(n-1)(\lambda_1-\lambda_2)}=0{,}509\,mm.$$

Dacă valoarea lui h crește în continuare se obține pentru un alt ordin de interferență, respectiv o noua dispariție a tabloului de interferență în regiunea punctului O.

6. Se consideră grosimea lamei de mai sus $h=0{,}01\,mm$. Considerând fenomenul de dispersie, să se stabilească ordinul de interferență al franjei acromatice. Aceasta franjă este vizibilă în cazul de față? Se cere ca franja acromatică să apară numai dacă ordinul de interferență p nu variază practic în jurul valorii $\lambda=0{,}5\mu m$ pentru care ochiul prezintă sensibilitatea cea mai mare.

R: Intr-un punct P al ecranului, situat la distanța y de axă, diferența de drum optic este:

$$\Delta=\frac{2a(n-1)\alpha}{L}y-(\mu-1)h.$$

Noua poziție a franjei de ordin zero $(p=0)$ se obține pentru $\Delta=0$, deci:

$$y_0=\frac{Lh}{2a}\frac{\mu-1}{n-1}=30{,}95\,mm \text{ (pentru } \lambda=0{,}5\mu m\text{)}$$

Față de $y=0$, acest punct se află la: $\frac{y_0}{i_{\lambda=0,5\mu m}}=12$ interfranje.

Această poziție depinde de lungimea de undă, prin urmare în lumină albă franja centrala apare irizată.

Să determinăm poziția franjei acromatice. Pentru un punct P oarecare din planul de observație ordinul de interferență este:

$$p=\frac{\Delta}{\lambda}=\frac{2a(n-1)\alpha}{L\lambda}y-(\mu-1)\frac{h}{\lambda}.$$

In punctul considerat este necesar ca ordinul de interferență să nu depindă de lungimea de undă, deci:

$$\frac{\partial p}{\partial\lambda}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}\frac{d\Delta}{d\lambda}-\frac{\Delta}{\lambda^2}=0, \text{ de unde:}$$

$$p=\frac{\Delta}{\lambda}=\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}=\frac{2ay\alpha}{L}\frac{dn}{d\lambda}-h\frac{d\mu}{d\lambda}=\frac{p\lambda+(\mu-1)h}{n-1}\frac{dn}{d\lambda}-h\frac{d\mu}{d\lambda},$$

$$p=\frac{2h}{\lambda}\frac{(n-1)-(\mu-1)b}{(n-1)\lambda^2+2b}=1{,}931,$$

deoarece: $\frac{dn}{d\lambda}=-\frac{2b}{\lambda^3}$ și $\frac{d\mu}{d\lambda}=-\frac{2\beta}{\lambda^3}$?

(calculul este facut pentru $\lambda=0{,}5\mu m$, dar se obține același rezultat pentru oricare lungime de undă).

Introducând în relația $p=\frac{\Delta}{\lambda}$ valoarea lui p determinată mai sus, se obține poziția franjei "acromatice" față de $y=0$.

$$y_P=\frac{hL}{2a\alpha}\frac{2\beta+(\mu-1)\lambda^2}{2b+(n-1)\lambda^2}=35{,}91\,mm=y_0+\Delta y=$$

$$=(30{,}95+4{,}96)mm=(12+1{,}931)i_{\lambda=0,5\mu m}$$

Poziția acestei franje "acromatice" $y_P=35{,}91\,mm$ se află în afara câmpului de interferență, $OP=8{,}43\,mm$, deci nu este vizibilă.

Bilentilele lui Billet - 1

Se consideră o lentilă convergentă L cu distanța focală $f = 50\,cm$ și cu diametrul $2H = 4\,cm$, iluminată de o sursă punctiformă S situată pe axa optică la distanța $p = \frac{3}{2}f$ de lentilă. Lentila L este tăiată de-a lungul diametrului în două părți L_1 și L_2. Cele doua părți se îndepărteză cu $\varepsilon = 1\,mm$ de axa optică printr-o translație perpendiculară pe aceasta.

Un ecran E este dispus perpendicular pe axa optică la o distanță $L = 50\,cm$ față de punctul M al intersecției celor două fascicule ce interferă. Sursa de radiație emite în domeniul spectral delimitat de $\lambda_0 = 400\,nm$ și $\lambda_1 = 500\,nm$. Se presupune că f are aceeași valoare pentru toate lungimile de undă.

1. Pe baza fig. 27, să se explice formarea franjelor de interferență pe ecranul E.

R: Fie S_1 și S_2 imaginile sursei S formate de cele două semilentile L_1 și L_2. Cele două fascicule care emerg din punctele S_1 și S_2 se întâlnesc în M, de unde încep să se suprapună parțial, creind câmpul de interferență.

Să considerăm un punct P, de pe ecranul E, al acestui câmp. In punctul P se întâlnesc două raze SL_1S_1P și SL_2S_2P care provin de la același punct al sursei S, deci sunt coerente. Amplitudinea vibrației rezultante în punctul P este: $A = 2a\cos\frac{\varphi}{2}$, unde $\varphi = \frac{2\Delta}{\lambda}$, $\Delta = S_2P - S_1P$ reprezentând diferența de drum,

deoarece există egalitatea drumurilor optice $SL_2S_2 = SL_1S_1$. Pozițiile de ampiltudine rezultantă egală se află pe o familie de suprafețe hiperbolice pentru care S_1 și S_2 sunt focare. Secționarea acestor suprafețe hiperbolice de către planul E conduce la franje de interferență care apar aproape ca niște drepte.

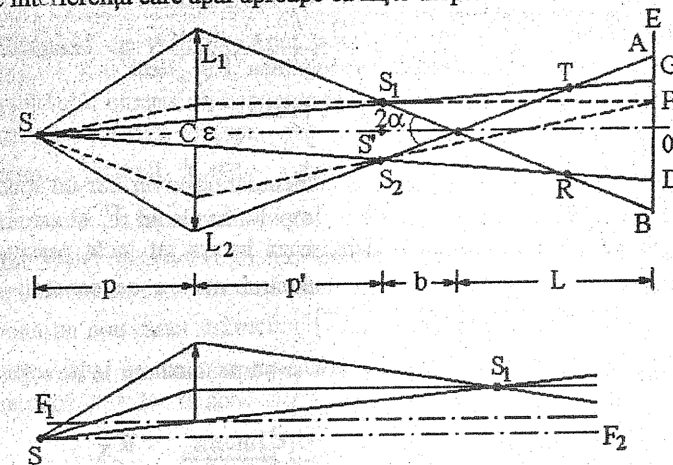


Fig. 27

Din relația: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$, rezultă:

$$p' = CS' = 3f \text{, deci: } SS' = \frac{9}{2}f = 3p$$

Din fig. 27: $\frac{S_1S_2}{\varepsilon} = \frac{p+p'}{p} = \frac{3p}{p}$, deci: $S_1S_2 = 3\,cm$;

$$\frac{S'M}{CM} = \frac{S_1S_2}{2H+\varepsilon} \text{, deci: } \frac{b}{p'+b} = \frac{3}{41},\ b = 11{,}8\,cm,$$

iar: $CM = p' + b = 3{,}50 + 11{,}8 = 161{,}8\,cm$

2. Să se calculeze lărgimea "unghiulară" $2u$ a regiunii comune a celor două fascicule ce interferă, de pe ecranul E, plasat la distanța L față de punctul M.

R: Unghiul $S_1MS_2 = 2\alpha$, format de razele extreme, are o valoare mică, deci se poate scrie:

$$2\alpha = \frac{2H+\varepsilon}{CM} = \frac{41}{1618} \cong \frac{1}{40}.$$

Razele extreme intersectează ecranul în punctele A și B, deci:

$$AB \cong 2\alpha\Delta = \frac{500}{40}.$$

Razele centrale intersectează ecranul E în punctele G şi D, deci:

$$\frac{GD}{\varepsilon} = \frac{SO}{p},\ GD = \varepsilon\frac{SO}{p} = 3{,}824\,mm.$$

Deoarece $GD \langle AB$, ecranul se află dincolo de regiunea TR, deci:

$$2u = GD = 3{,}824\,mm.$$

3. Să se descrie aspectul succesiv al fenomenului observat într-un spectroscop a cărui fantă se află la o distanţă r de centrul câmpului în planul E şi este orientată paralel cu franjele, dacă spectroscopul se deplasează în aşa fel încât parametrul x variază între valorile $0 \div u$. Să se estimeze numărul maxim de caneluri ce apar simultan dacă $\Delta\lambda = (400 \div 600)$nm.

R: Pe ecranul E franjele apar rectilinii şi perpendiculare la direcţia S_1S_2. Franja centrală este albă (fig. 28).

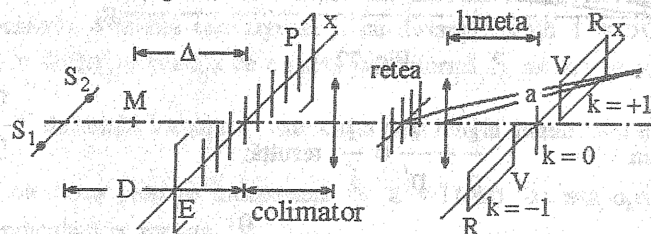


Fig. 28

Să considerăm un punct P, situat la distanţa x faţă de franja centrală. Diferenţa de drum optic este:

$$\Delta = S_2P - S_1P = \frac{S_1S_2}{b+L}x = \frac{3\,mm}{618\,mm}x,$$

iar, pentru o lungime de undă dată, interfranja $i_\lambda = \frac{b+L}{S_1S_2}\lambda$ este proporţională cu lungimea de undă.

La deplasarea fantei spectroscopului se observă următorul tablou de interferenţă: începând de la franja centrală unde $\Delta = 0$, ceeace determină un maxim de intensitate pentru toate radiaţile, de o parte şi de alta se află o franja luminoasă, irizată la margini în violet spre interior şi roşu la exterior (atragem atenţia că, de fapt, şi franja centrală este irizată la margini în roşu). In cea de a doua franjă domeniul irizat în roşu se distanţează şi mai mult de cel irizat în violet, astfel încât domeniul violet al celei de a treia franjă coincide cu cel roşu din a doua $(2\lambda_1 = 3\lambda_0 = 1{,}2\mu m)$. Dacă parametrul x creşte şi mai mult se obţine "albul de ordin superior".

Dacă fanta spectroscopului este dispusă exact în punctul O, se observă un spectru strălucitor de la violet la roşu. Când fanta se deplasează în sensul creşterii lui x (fanta aflându-se încă în interiorul franjei centrale) se observă o diminuare a intensităţii culorilor începând cu violetul. Apoi pentru $x = \frac{i_\lambda}{2}$, fiecare culoare va fi stinsă, stingerea violetului precedând stingerea radiaţiei roşii (un canel întunecat, larg va trece prin spectru de la violet la roşu, atunci când se deplasează spectroscopul). Pentru $x = i_V$ reapare violetul, $x = i_G$ - galbenul şi $x = i_R$ - roşul sub forma unui canel larg strălucitor care va trece prin spectru de la violet la roşu. Pentru $x = 2i_V$, din nou apare dinspre violet un canel strălucitor care se deplasează spre roşu odată cu deplasarea spectroscopului. Acest canel încă nu părăseşte spectrul înspre roşu în momentul în care apare în violet un nou canel strălucitor $(2\lambda_1 = 3\lambda_0 = 1{,}2\mu m)$. Cu creşterea valorii parametrului x apar din ce în ce mai multe caneluri şi acestea se îndesesc. Numărul lor va fi maxim dacă $x = u$. In acest caz:

$$\Delta = \frac{S_1S_2}{b+L}u = 9{,}28\mu m.$$

Pentru radiaţiile extreme ordinele de interferenţă sunt:

$$\lambda_0 = 0{,}4\mu m,\ k_0 = \frac{9{,}28}{0{,}4} = 25{,}2;\ \lambda_1 = 0{,}6\mu m,\ k_0 = 15{,}4.$$

In spectru, la toate radiaţiile cuprinse între aceste lungimi de undă şi pentru care $\Delta = k\lambda$, unde k este un număr întreg, le vor corespunde caneluri luminoase. Sunt opt asemenea caneluri:

$$\lambda_{16} = \frac{9{,}28}{16} = 0{,}58\mu m,\ \lambda_{17} = 0{,}546\mu m, ...,\ \lambda_{23} = \frac{9{,}28}{23} = 0{,}405\mu m.$$

De asemenea apar opt caneluri întunecate, ordinul lor de interferenţă fiind cuprins între 15,5 si 22,5:

$$\lambda_{15,5} = \frac{9{,}28}{15{,}5} = 0{,}5922\mu m, ...,\ \lambda_{22,5} = 0{,}4124\mu m.$$

4. Să se explice aspectul tabloului observat dacă spectroscopul este aşezat în aşa fel încât fanta este perpendiculară la franjă. Se va analiza cazul când se utilizează atât un spectroscop cu prismă, cât şi unul cu reţea de difracţie. In cazul spectroscopului cu reţea se va stabili ecuaţia liniilor de distribuţie a luminii în planul focal al obiectivului lunetei spectroscopului (se va considera axa x paralelă cu fanta, iar axa y perpendiculară pe aceasta).

R: a) *Spectroscop cu rețea de difrație*: în acest caz vor apare mai multe spectre de diferite ordine (fig. 29). Să ne situăm de ex. în spectrul de ordinul întâi. Dacă se consideră o singură radiație λ, atunci în spectru, în locul corespunzător acestei lungimi de undă, vor apare o serie de puncte luminoase dispuse față de franja centrală la distanța:

$$x = ki_\lambda = k\frac{(L+b)\lambda}{S_1S_2}.$$

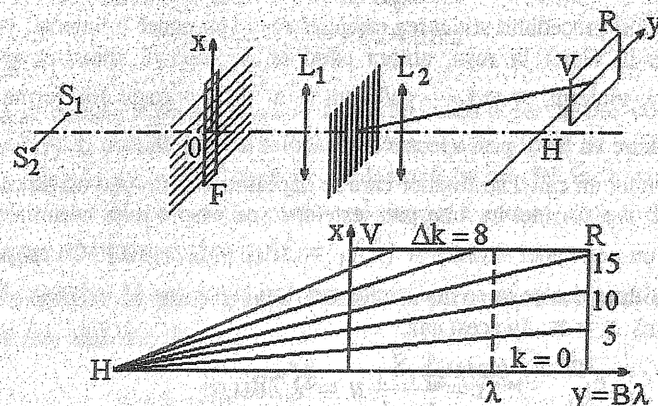


Fig. 29

Poziția radiației în spectru este determinată de dispersia rețelei, fiind dispusă la distanța $y = B\lambda$ de franja de difracție de ordin zero. Când se trece la altă radiație maximele de radiație determinate de interferență se deplasează pe nițte drepte:

$$\frac{x}{y} = ct \cdot k.$$

Dacă înălțimea fantei spectroscopului cuprinde tot câmpul de interferență, atunci în domeniul violet se vor observa $2 \cdot 23 + 1 = 47$ caneluri, iar în roșu: $2 \cdot 16 + 1 = 33$ caneluri.

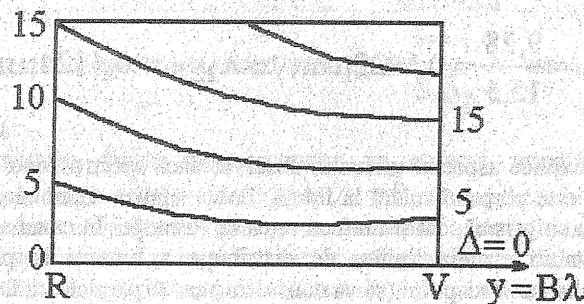


Fig. 30

b) *Spectroscop cu prismă*: In acest caz se obține un singur spectru. Poziția radiației în spectru nu mai este proporțională cu lungimea de unda $(y = B\lambda)$, ci cu $y = f(\lambda)$; ($f(\lambda)$ - dispersia prismei), și ca rezultat liniile $k = ct$ nu mai sunt niște drepte (fig. 30).

5. Cele doua lentile L_1 și L_2 se îndepărtează de-a lungul axei optice (experiența lui Mesnil). Să se stabilească că suprafețele de interferență sunt niște suprafețe elipsoidale ce au drept focare imaginile S_1 și S_2 ale lui S, imagini ce se află pe axa optică a semilentilelor. Franjele se observă într-un plan perpendicular pe axa optică.

R: Regiunea comună a celor două fascicule se întinde de la S_2 la S_1, fiind foarte îngustă, astfel încât franjele sunt vizibile numai cu ajutorul lupei. Să considerăm un punct P, dispus pe ecranul E, în câmpul de interferență (fig. 31 - se va analiza grafic poziția focarelor imagine S_1 și S_2 funcție de poziția sursei față de L_1 și a distanței dintre L_1 și L_2).

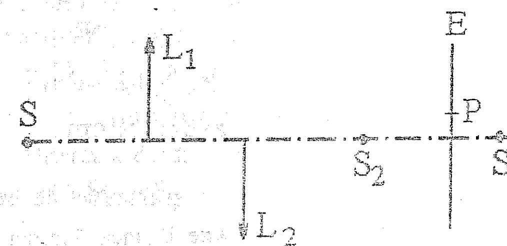


Fig. 31

Drumurile optice sunt corespunzător:

$$(SL_1P) = (SS_1) - (PS_1) \text{ și } (SL_2P) = (SS_2) + (PS2),$$

unde mărimea (SS_1), considerată pe axa optică, este:

$$(SS_1) = (SS_2) + (S_2S_1) = (SS_2) + 2l,$$

de unde:

$$\Delta = (S_2P + S_1P) - 2l.$$

Pentru: $\Delta = ct$ se obține:

$$S_2P + S_1P = 2l + ct,$$

ceeace reprezintă ecuația unor elipsoizi homofocali. Dacă $\Delta = k\lambda$ - franjele sunt întunecate deoarece la trecerea luminii prin focarul S_2 se introduce o diferență de drum suplimentară egală cu $\lambda/2$ (efectul Guoy). Franjele apar sub formă de *semi*cercuri, centrul fiind întunecat și dispus pe axa optică, iar în lumină albă sunt irizate în violet spre interior și roșu spre exterior.

Bilentilele lui Billet - 2

Considerăm sistemul de lentile Billet. Distanța dintre cele două jumătăți de lentile $C_1C_2 = 0{,}5\,mm$, iar distanța focală a lentilei inițiale este egală cu $f = 20\,cm$; fanta, paralelă cu tăietura lentilei, se află la distanța $p = 40\,cm$ față de *bi*lentile, iar ecranul de observare E la o distanță egală cu $60\,cm$.

1. - Să se calculeze valoarea interfranjei i și numărul de franje luminoase observate pe ecranul E $(\lambda = 500\,nm)$. Care este lățimea minimă ε a fantei S pentru care vizibilitatea tabloului de interferență devine egală cu zero?

R: Deoarece $p = 40\,cm = 2f$, rezultă $p' = 2f = 40\,cm$, iar $\dfrac{S_1S_2}{C_1C_2} = \dfrac{p+p'}{p}$, deci $S_1S_2 = 2a = 1\,mm$.

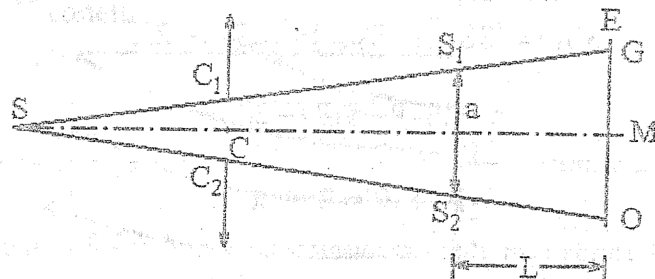


Fig. 32

Interfranja $i_\lambda = \dfrac{L}{S_1S_2} = 0{,}1\,mm$. Presupunem diametrul *bi*lentilei suficient de mare astfel încât câmpul de interferență pe ecranul E să fie limitat de razele SC_1S_1 și SC_2S_2 (fig. 32).

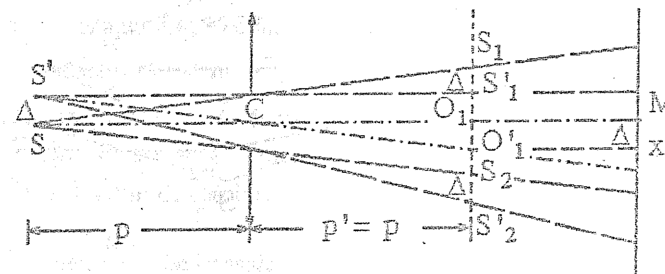
Semilărgimea câmpului va fi:

$$\frac{MG}{a} = \frac{p+p'+L}{p+p'},\ \text{de unde: } MG = 0{,}625\,mm.$$

Numărul de franje: $\dfrac{MG}{i} = 6{,}25$, deci numărul de franje luminoase în câmpul de interferență este:

$$n = 2\cdot 6 + 1(\text{fr. centrala}) = 13.$$

Dispariția franjelor determinată de lărgirea fantei. Să considerăm două surse S și S', iar distanța $SS' = a$. Imaginile lui S' sunt S_1' și S_2', iar $S_1'S_1 = S_2S_2' = O_1O_2' = a$, (deoarece $p = p'$) și $S_1S_2 = S_1'S_2' = 2a$ (fig. 33 a). Să considerăm un punct oarecare P în câmpul de interferență în așa fel încât $MP = a + x$. Diferența de drum optic între razele ce pleacă din S' și ajung în P, trecând respectiv prin S_1' și S_2' este:



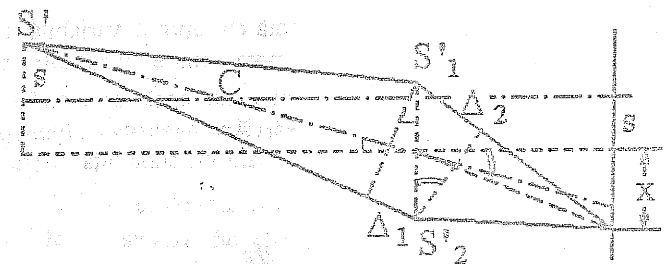


Fig. 33 a,b

$$(S'S_1'P)-(S'S_2'P)=(S'S_1')-(S'S_2')+(S_1'P)-(S_2'P)=\Delta_2-\Delta_1,$$

unde:

$$\frac{\Delta_1}{2a}=\frac{2s}{2p},\ \Delta_1=2a\frac{s}{p}\ \text{și}\ \frac{\Delta_2}{2a}=\frac{x}{L},\ \Delta_2=2a\frac{x}{L}.$$

Pentru ca în punctul P să fie localizată o franjă centrală este necesar ca diferența de drum optic să fie egală cu zero, ceeace se realizează când $\Delta_1=\Delta_2$, deci:

$$x=s\frac{L}{p}\ \text{și}\ MP=s\left(1+\frac{L}{p}\right).$$

Să analizăm condițiile în care vizibilitatea tabloului de interferență devine egală cu zero (dispar franjele de interferență). La început considerăm două surse punctiforme situate pe o dreaptă perpendiculară pe axa optică a sistemului (S și S') (fig. 34). Dacă valoarea distanței a dintre cele două surse este în așa fel încât M' (maximul central al sistemului de franje S') coincide cu, de ex., primul minim al sistemului de franje de interferență S, atunci câmpul de interferență va fi uniform iluminat. Mărind valoarea distanței a se ajunge la situația când franja corespunzătoare lui $k=0$ a sistemului M' se suprapune peste franja $k=1$ a sistemului M, deci din nou se observă tabloul de interferență. Mărind în continuare distanța a, franjele de interferență vor apare și dispare alternativ.

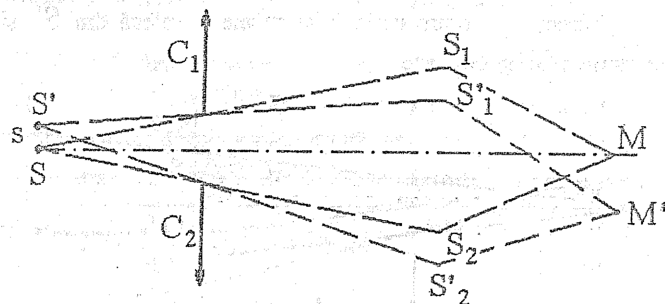


Fig. 34

Să considerăm în locul sursei S o fantă cu lățimea variabilă. Se observă că mărind deschiderea fantei, atunci când distanța dintre maximile sistemelor de interferență date de marginile A și C ale fantei este egală cu interfranja i, dispare complet vizibilitatea franjelor. Din fig. 35 se observă că intensitatea luminoasă în fiecare punct al câmpului de interferență este proporțională cu suprafața cuprinsă între două minime:

$$I_P=\int_{x_1}^{x_2}I(x)dx.$$

Deci lățimea minimă a fantei sistemului pentru care vizibilitatea franjelor dispare complet se obține atunci când $MP=i$. Dacă mărim lățimea fantei franjele reapar, dar pe un fond luminos. Odată cu mărirea fantei vizibilitatea scade până se obține un câmp iluminat uniform.

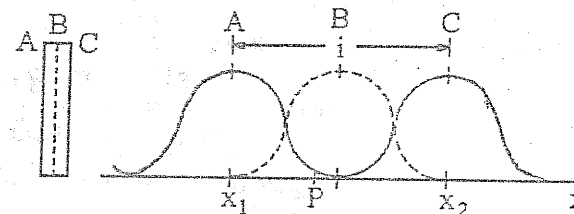


Fig. 35

Pentru $MP=i$, se obține:

$$s=\varepsilon=\frac{i}{1+\frac{L}{p}}=0{,}066\,\text{mm}.$$

2. - Să considerăm *bi*lentilele neacromatizate, deci imaginile S_1 și S_2 corespunzătoare la diferite frecvențe nu mai coincid; distanța $S_1S_2=2a$, precum și distanța L până la ecran variază cu lungimea de undă λ. Să se determine poziția ecranului de observare pentru ca franjele să rămână nete în lumină albă. In acest scop considerăm că distanța dintre ecran și *bi*lentile ($H=p'+L$), distanța de la fanta S la *bi*lentile (p) precum și distanța C_1C_2 dintre centrele optice (e) sunt independente de lungimea de undă; notăm cu f distanța focală corespunzătoare radiației λ a *bi*lentilelor presupuse subțiri. Pentru această radiație medie se va calcula distanța 2a, L, precum și interfranja i funcție de mărimile H, e, p, și f. Se va calcula valoarea H care anulează mărimea $\frac{di}{d\lambda}$. Se consideră relația:

$$\frac{\lambda}{f}\frac{df}{d\lambda}=-\frac{\frac{dn}{n-1}}{\frac{d\lambda}{\lambda}}=A,$$

unde A reprezintă o constantă pozitivă caracteristică materialului din care este confecționată lentila subțire. Se va verifica dacă franjele sunt acromatice. Sursa S și ecranul E sunt dispuse conjugat față de o lentilă subțire fictivă plasată în C_1C_2, a

cărei distanță focală ar fi egală cu $f(1+A)$. Pentru $\lambda = 500\,\text{nm}$, se consideră $A = 0{,}11$, $p = 40\,\text{cm}$ și $f = 20\,\text{cm}$.

R: Din relația lentilelor subțiri:

$$\frac{1}{f_\lambda} = (n_\lambda - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \text{ se obține: } \frac{df}{d\lambda} = -\frac{f}{n-1}\frac{dn}{d\lambda}, \text{ de unde:}$$

$$\frac{\lambda}{f}\frac{df}{d\lambda} = -\frac{\dfrac{dn}{n-1}}{\dfrac{d\lambda}{\lambda}} = A.$$

(când λ crește, n scade, deci f crește).

Pentru radiația cu lungime de undă medie λ:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}, \text{ deci: } p' = \frac{pf}{p-f} \text{ și } L = H - p' = \frac{Hp - f(H+p)}{p-f},$$

iar:

$$\frac{2a}{e} = \frac{p+p'}{p} = \frac{p}{p-f}, \text{ deci: } 2a = \frac{ep}{p-f}.$$

De unde:

$$i = \frac{\lambda D}{2a} = \frac{[Hp - f(H+p)]\lambda}{ep}$$

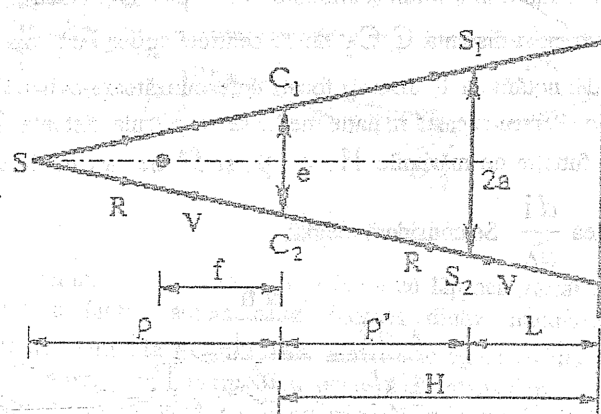


Fig. 36

Deoarece mărimile H, p și e nu depind de lungimea de undă:

$$ep\frac{di}{d\lambda} = \frac{\lambda D}{2a} = Hp - f(H+p) - \lambda(H+p)\frac{df}{d\lambda}, \text{ unde: } \frac{df}{d\lambda} = A\frac{f}{\lambda}.$$

Această expresie se ...ează pen...

$$\frac{Hp}{H+p} = f(A+1), \text{ sau: } \frac{1}{p} + \frac{1}{H} = \frac{1}{F(A+1)},$$

(deci sursa S și ecranul E sunt conjugate în raport cu lentilă fictivă din C_1C_2 și a cărei distanța focală este $f(1+A)$. De unde:

$$H = \frac{pf(A+1)}{p - f(A+1)} = 49{,}88\,\text{cm}, \text{ iar } i = \frac{\lambda D}{2a} = 49{,}4\,\mu\text{m}.$$

3\. - Sursa S este punctiformă și monocromatică ($\lambda = 500\,\text{nm}$). Cele două jumătăți de lentilă se distanțează de-a lungul axei optice, fiind situate față de S la distanța $SC_1 = p_1$, respectiv $SC_2 = p_2$ (lentilele Mesnil). Imaginile sursei S formate de cele două jumătăți de lentilă se află față de sursă la distanța $SS_1 = Z_1$ și $SS_2 = Z_2$. Să se arate că în planul E, situat la distanța $SO = Z$ față de sursă (Z cuprins între Z_1 și Z_2), se observă franje *semi*circulare cu centrul în O. Să se calculeze raza r a cercului întunecat cu numărul k funcție de mărimile Z, Z_1, Z_2 și λ (se consideră că valoarea mărimii r este mică față de mărimea distanțelor $S_1O = Z_1 - Z$ și $S_2O = Z - Z_2$). Se va considera $f = 20\,\text{cm}$, $p_1 = 25\,\text{cm}$, $p_2 = 40\,\text{cm}$, $Z = 100\,\text{cm}$ și $k = 1$. Să se arate că franjele sunt cele mai largi posibil când ecranul E se află la distanță egală de imaginile S_1 și S_2.

R: Câmpul de interferență este determinat de partea comună a celor două fascicule care au forma a două jumătăți de con a căror vârfuri se află în S_1, respectiv S_2 (fig. 37). Deci sistemul de franje prezintă o simetrie cilindrică în jurul axei SS_1S_2. Intersecția sistemului de franje cu un plan E, perpendicular pe axa optică SS_1S_2, reprezintă franje de forma *semi*circulară. Centrul *semi*cercurilor ce se află pe axa SS_1S_2 este întunecat deoarece unul din fascicule (S_2), trecând prin focar capătă o diferență de drum optic suplimentar de $\frac{\lambda}{2}$ (diferență de fază suplimentară de π) (fig. 37). Diferența de drum optic:

$$\Delta = SL_1P - SL_2P + \frac{\lambda}{2} = SL_1S_1 - S_1P - SL_2S_2 - S_2P + \frac{\lambda}{2} =$$

$$= (SS_1 - SS_2) - (S_2P + S_1P) + \frac{\lambda}{2} = S_2S_1 - (S_2P + S_1P) + \frac{\lambda}{2} = ct$$

(deoarece drumurile optice sunt egale: $SL_1S_1 = SS_1$ și $SL_2S_2 = SS_2$)

de unde:

$$S_1P + S_2P = S_1S_2 + \frac{\lambda}{2} - \Delta.$$

Pentru $\Delta = ct$ se obţine: $S_1P + S_2P = ct$, deci suprafeţele pentru care $\Delta = ct$ reprezintă suprafeţe elipsoidale de revoluţie cu focarele în S_1 şi S_2 (pe ecranul E se vor obţine franje de formă *semi*circulară).

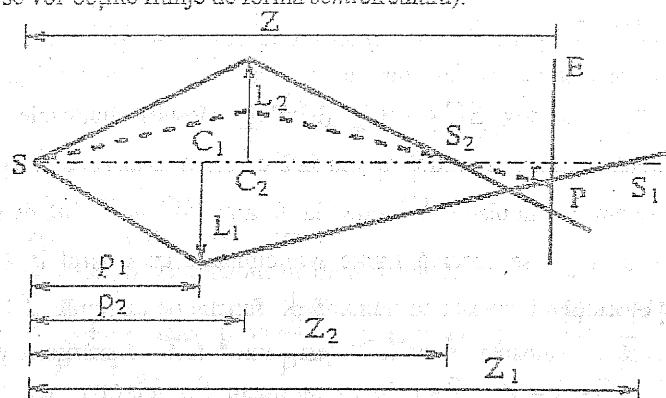


Fig. 37

$$S_2P = \sqrt{(Z - Z_2)^2 + r^2} =$$

$$= (Z - Z_2)\sqrt{1 + \frac{r^2}{(Z - Z_2)^2}} \cong (Z - Z_2)\left[1 + \frac{r^2}{2(Z - Z_2)}\right].$$

$$\Delta_1 = \Delta - \frac{\lambda}{2} = Z_1 - Z_2 - (Z - Z_2) - \frac{r^2}{2(Z - Z_2)} - \frac{r^2}{2(Z_1 - Z)} =$$

$$= \frac{r^2}{2}\frac{Z_1 - Z_2}{(Z - Z_2)(Z_1 - Z)}$$

Dacă $\Delta_1 = k\lambda$ obţinem cercuri întunecate a căror rază este:

$$r_k = \sqrt{k}\sqrt{2\lambda}\sqrt{\frac{(Z - Z_2)(Z_1 - Z)}{Z_1 - Z_2}}.$$

Pentru $f = 20\,\text{cm}$, $p_1 = 25\,\text{cm}$, $p_2 = 40\,\text{cm}$, se obţine:

$p_1' = 100\,\text{cm}$, $p_2' = 40\,\text{cm}$, $Z_1 = 125\,\text{cm}$ şi $Z_2 = 80\,\text{cm}$ $\left(\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right)$,

deci: $r_1 = 0{,}333\,\text{mm}$.

Mărimea r_k este maximă atunci când:

$$Z - Z_2 = Z_1 - Z = \frac{Z_1 - Z_2}{2}, \text{ de unde: } Z = \frac{Z_1 - Z_2}{2}, \text{ deci:}$$

$$r_{k_{max}} = \frac{\sqrt{k}}{2}\sqrt{2\lambda(Z_1 - Z_2)}; \quad r_{+1_{max}} = 0{,}3354\,\text{mm}.$$

4. - Sistemul de lentile Mesnil se iluminează cu lumină albă. Din cauză dispersiei *semi*lentilelor, imaginile S_1 şi S_2 nu se formează la aceeaşi distanţa Z_1 şi Z_2 pentru toate lungimile de undă. Din această cauză este posibil să se observe franje nete în lumină albă (franje acromatice în lumină albă), adică pentru o oarecare poziţie a ecranului E, raza unei franje cu un număr k determinat nu variază sensibil cu lungimea de undă. Să considerăm această distanţa dintre ecran şi sursă egală cu Z. Să se stabilească relaţia dintre Z şi p_1, p_2, f şi constanta $A = \frac{\lambda}{f}\frac{df}{d\lambda}$. Se va calcula valoarea constantei A care caracterizează dispersia materialului *bi*lentilelor ($f = 20\,\text{cm}$, $p_1 = 25\,\text{cm}$, $p_2 = 40\,\text{cm}$, $Z = 85\,\text{cm}$).

R: Din relaţia $\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'}$, se obţine: $p_1' = \frac{p_1 f}{p_1 - f}$, deci:

$$Z_1 = p_1 + p_1' = \frac{p_1^2}{p_1 - f}, \text{ de unde: } \frac{dZ_1}{d\lambda} = \frac{p_1^2}{(p_1 - f)^2}\frac{df}{d\lambda} = \frac{p_1^2}{(p_1 - f)^2}A\frac{f}{\lambda}.$$

$$r_k^2 = 2k\lambda\frac{(Z - Z_2)(Z_1 - Z)}{Z_1 - Z_2}$$

(mărimile Z_1 şi Z_2 depind de lungimea de undă), este necesar ca raza *semi*cercului să nu depindă de lungimea de undă. Dacă se logaritmează şi se derivează în raport cu λ, iar derivata se egalează cu zero:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} + \frac{dZ_1}{d\lambda}\frac{(Z - Z_2)}{(Z_1 - Z)(Z_1 - Z_2)} - \frac{dZ_2}{d\lambda}\frac{(Z_1 - Z)}{(Z - Z_2)(Z_1 - Z_2)},$$

de unde:

$$\frac{(Z_1 - Z)(Z - Z_2)(Z_1 - Z_2)}{Af} =$$

$$= \frac{p_2^2}{(p_2 - f)^2}(Z_1 - Z)^2 - \frac{p_1^2}{(p_1 - f)^2}(Z - Z_2)^2$$

(dacă se cunoaşte constanta $A = -\frac{\frac{dn}{n-1}}{\frac{d\lambda}{\lambda}}$, se poate determina poziţia franjei acromatice). Dacă se cunoaşte mărimea Z atunci:

$$A = \frac{(Z_1 - Z)(Z - Z_2)(Z_1 - Z_2)}{f\left\{\left[\frac{p_2(Z_1 - Z)}{p_2 - f}\right]^2 - \left[\frac{p_1(Z - Z_2)}{p_1 - f}\right]^2\right\}}.$$

Pentru $Z = 85$ se obţine $A = 0{,}0779$ (pentru valoarea medie a distanţei focale f).

Pana de aer

Să considerăm două plăci de sticlă cu feţele prelucrate optic şi plan-paralele. Feţele au forma de pătrat cu latura de $40\,\text{mm}$ (fig. 38).

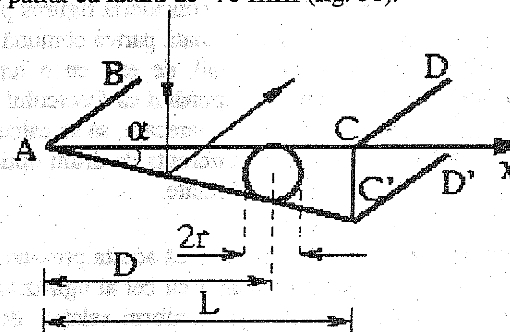


Fig. 38

1. - Cu cele două plăci se formează o pană de aer. Două laturi ale plăcilor (AB şi $A'B'$) coincid exact, iar celelalte două (CD şi $C'D'$) sunt separte printr-un fir de sârma de diametru $2r = 0{,}01\,\text{mm}$, dispus la $D = 35\,\text{mm}$ faţă capetele ce se sprijină direct. Sistemul este iluminat cu un fascicul de radiaţie monocromatică $\lambda = 546\,\text{nm}$ (radiaţia verde a Hg) sub incidenţă aproape normală. Să se calculaze numărul de franje negre de interferenţă care se observă, dacă ochiul este acomodat pe planul lamei subţiri.

R: Sursa de radiaţie monocromatică nu este punctiformă, franjele sunt localizate pe lamă, iar incidenţa este normală, deci:

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2}, \text{ unde } h = k\frac{\lambda}{2}, \text{ pentru franjele întunecate.}$$

Din fig. 38: $\frac{h}{2r} = \frac{x}{D}$. Franjă întunecată x va fi localizată în poziţia

$$x = \frac{Dh}{2r} = k\frac{\lambda D}{4r}, \text{ iar interfranja: } i = \frac{\lambda D}{4r} = 0{,}9555\,\text{mm}.$$

Numărul de franje întunecate până la fir: $\frac{D}{i} = 36 + \frac{344}{546}$, deci:

$$n = 36 + 1 \text{ (la contactul AB/A'B')} = 37.$$

In total apar: $\frac{L}{i} = \frac{4rL}{D} = 41$, deci $n = 41 + 1 = 42$ franje întunecate. Regiunea acoperită de fir se află în apropierea unei zone luminoase ($\frac{344}{546} = \frac{344}{\lambda} \cong \frac{1}{2}$ - franjă luminoasă).

2. - Să se arate că dacă fasciculul incident este considerat riguros paralel, se pot observa franje, în afara planului lamei subţiri de aer, în toată partea comună a celor două fascicule reflectate de cele două feţe ale lamei, vizând, de ex., cu o lupă o regiune îndepărtată de plăcile ce au format pana de aer. Presupunând că fasciculul cade normal pe linia de contact (AB) a plăcilor, însă sub o incidenţă oarecare, să se calculeze distanţa dintre suprafeţele de interferenţă (locul punctelor cu diferenţa de drum optic egală) care intersectează partea comună a celor două fascicule reflectate.

R: Dacă fasciculul este paralel putem considera că acesta provine de la o sursă punctuală ce se află la infinit. Acest caz este asemănător cu cel al oglinzilor Fresnel (se obţin franje de interferenţă nelocalizate). Inerfranja, conform relaţiei de la oglinzile Fresnel:

$$i = \frac{\lambda L}{2a} = \frac{\lambda L}{2R\alpha},$$

unde: α - unghiul dintre cele două oglinzi, respectiv unghiul penei de aer, R - distanţa dintre sursă (imagini) şi linia de contact a celor două plăci, L - distanţa imagine-ecran.

Dacă mărimea R tinde la infinit şi L tinde la infinit, deci $i = \frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{\lambda D}{4r} = 0{,}9555\,\text{mm}$, deoarece: $\alpha = \frac{2r}{D}$ (unghiul penei de aer).

3. - Intre cele două plăci, la ambele capete, se aşează câte un fir cu diametrul de $2r = 0{,}04\,\text{mm}$, obţinând astfel o lamă subţire de aer cu feţe plan-paralele. Sistemul

se iluminează sub incidenţă aproape normală cu un fascicul de lumină albă. Imaginea lamei subţiri se proiectează pe fanta unui spectroscop. Să se calculeze numărul de caneluri întunecate, vizibile în domeniul spectral $\lambda = (656 \div 486)\,\text{nm}$. Să se indice schematic cum poate fi aranjată experienţa.

R: Fanta spectroscopului este iluminată cu radiaţie de tip "alb de ordin superior". Pentru radiaţiile care lipsesc, făcând să apară caneluri întunecate în spectru, este îndeplinită condiţia: $2h = k\lambda$.

$$\text{Deci: } \lambda_1 = 656\,\text{nm},\ k_1 = \frac{2h}{\lambda_1} = \frac{80\,\mu\text{m}}{656\,\text{nm}} = 121 + \frac{624}{656};$$

$$\lambda_2 = 486\,\text{nm},\ k_2 = 164 + \frac{296}{486}$$

Prin urmare în spectru vor apărea: $164 - 121 = 43$ caneluri întunecate. Observarea tabloului de interferenţă se poate face cu dispozitivul clasic al lui Fizeau (fig. 39).

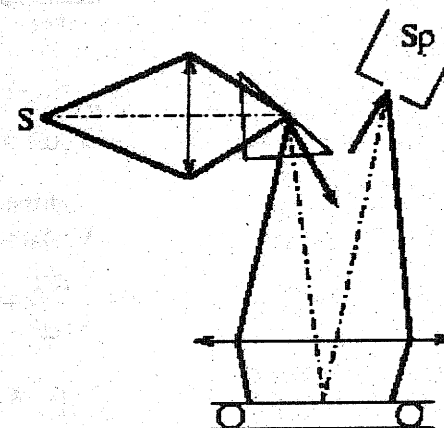


Fig. 39

Să considerăm două lame de sticlă plane M_1 şi M_2, semi-argintate, care fac un unghi mic α. Lama M_2 este fixă, iar lama M_1 se poate roti în jurul axului A, perpendicular pe fig. 40 şi care se află la $r = 4\,\text{cm}$ de lame. Lamele sunt iluminate normal cu radiaţia monocromatică $\lambda = 560\,\text{nm}$ emisă de sursa S. Ansamblul M_1M_2 formează franje localizate pe pana de aer care se observă cu luneta L.

1. - Dacă se rotește lama M_1 cu un unghi $d\alpha$ apare o deplasare a franjelor. Știind că se poate observa o deplasare de $\frac{1}{2}$ dintr-o franjă, să se aprecieze cea mai mică valoare a unghiului de rotație ce poate fi observată prin această metodă?

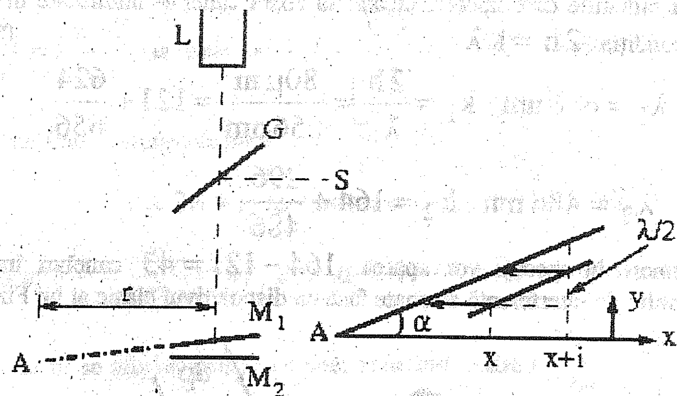


Fig. 40

R: Dacă i reprezintă valoarea interfranjei, atunci $\alpha i = \frac{\lambda}{2}$ și $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$. Franjele apar sub forma unor drepte paralele cu axa A, echidistante și localizate pe conul de aer. Să considerăm franja dispusă la distanța x de A. Dacă diferența de drum: $\Delta = 2\alpha x + \frac{\lambda}{2}$ reprezintă o mărimea constantă se obține: $\frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{dx\alpha}{x} = 0$. Dacă unghiul α crește cu $d\alpha$, această franjă se deplasează spre A cu $dx = -x\frac{d\alpha}{\alpha}$, în așa fel încât mărimea Δ rămâne constantă, cu atât mai mult cu cât se află mai departe de A. La marginea opusă lui A apar franje, iar la marginea dinspre A acestea dispar. Apar mai multe franje decât dispar, deci se îndesesc, deoarece mărimea interfranjei i scade. Pentru $x = r$, deplasarea trebuie să fie egală cu:

$$dx = -\frac{i}{20} = -\frac{\lambda}{40\alpha},$$

$$d\alpha = -\frac{\alpha}{x}dx = \frac{\alpha}{r}\frac{\lambda}{40\alpha} = \frac{\lambda}{40r} = 3{,}5\cdot10^{-7}\text{ rad} = 0'',0722$$

2. - Cu cât trebuie translată oglinda M_2 de-a lungul normalei pentru a se obține aceeași deplasare a franjelor ca și la rotația precedentă de unghi $d\alpha$?

R: In cazul rotației de unghi $d\alpha$, drumul optic a variat cu: $d\Delta = 2\alpha d\alpha$, iar la translație variația este: $d\Delta = 2dy$.

Deci: $dy = xd\alpha$. Pentru $x = r$ și $d\alpha = \frac{\lambda}{40r}$ se obține:

$$dy = r\frac{\lambda}{40r} = \frac{\lambda}{40} = 0{,}014\mu m$$

3. - Luneta L permite să se separe în planul franjelor de interferență un interval egal cu $0{,}1\text{mm}$. Să se stabilească valoarea maximă a unghiului α pentru care încă se poate obține un sistem de franje care să poată fi separat de lunetă?

R: Când valoarea mărimii α crește, mărimea interfranjei i scade, sistemul de franje ne mai putând fi distins prin lunetă pentru $i_{min} = 0{,}1\text{mm}$. Deci valoarea maximă a mărimii α este:

$$\alpha_M = \frac{\lambda}{2i_{min}} = 2{,}8\cdot10^{-3}\text{ rad} = 9'37''.$$

Inelele lui Newton localizate

1. - Dispozitivul pentru obținerea inelelor lui Newton este constituit dintr-o lentilă plan-convexă așezată cu fața ei sferică pe o suprafață plană de sticlă, contactul fiind perfect și fără deformații (fig. 41). Se iluminează cu radiația de lungime de undă $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$, iar observarea se face sub incidență normală. Se constată că primul inel întunecat ce înconjoară punctul central are un diametru egal cu $2\,\mathrm{mm}$. Să se determine convergența lentilei. Indicele de refracție $n = 1{,}53$.

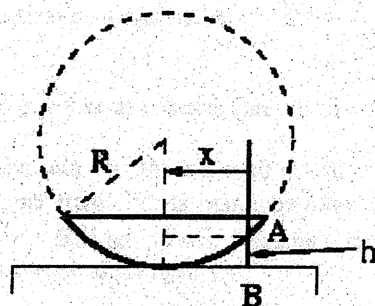


Fig. 41

R: Diferența de drum optic între fasciculul reflectat de suprafața curbă și cel reflectat de suprafața plană, sub incidență normală este:

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2}$$

($\frac{\lambda}{2}$ reprezintă întârzierea introdusă la reflexia aer/sticlă în punctul B).

Pe de altă parte: $x^2 = (2R - h)h \cong 2Rh$.

Deci:
$$\Delta = \frac{x^2}{R} + \frac{\lambda}{2}.$$

Inelele întunecate se obțin pentru: $\frac{x_k^2}{R} = k\lambda$, deci:

$$x_k = \sqrt{R\lambda}\sqrt{k} = x_1\sqrt{k}, \text{ de unde: } \frac{\lambda}{x_1^2} = \frac{1}{R}$$

Convergența lentilei plan-convexe:

$$C = \frac{1}{f} = (n-1)\frac{1}{R} = (n-1)\frac{\lambda}{x_1^2} = 0{,}2915 \text{ dioptri}$$

2. - Indicele de refracție al lamei de sticlă este egal cu: $n'' = 1{,}73$; între lentilă și lama de sticlă se introduce un lichid al cărui indice de refracție este egal cu $n' = 1{,}625$. Ce modificări apar în tabloul de interferență? Care este diametrul primului inel întunecat.

R: Deoarece $n = 1{,}55 < n' = 1{,}625 < n'' = 1{,}73$, la cele două reflexii în punctele A și B se introduce o diferență de drum optic suplimentar egal cu $\frac{\lambda}{2}$ și în acest mod, se compensează. Noua diferență de drum devine:

$$\Delta' = 2n'h = n'\frac{x^2}{R}.$$

Centrul inelelor devine luminos (în lumină albă pata luminoasă centrală va fi irizată pe margini). Poziția primului inel întunecat din sistemul anterior se schimbă foarte puțin, apropiindu-se de centru, însă devine al doilea inel întunecat în noul sistem de inele. Primul inel x_1' va corespunde unei diferențe de drum optic egale cu $\frac{\lambda}{2n'}$ $(k = 0)$:

$$2n'h = \frac{\lambda}{2} = n'\frac{x'^2_1}{R}, \text{ de unde: } x_1' = \sqrt{\frac{R\lambda}{2n'}} = \frac{x_1}{\sqrt{2n}} = 0{,}55\,\mathrm{mm},$$

iar diametrul: $2x_1' = 1{,}1\,\text{mm}$. Din fig. 42 se observă că există o poziţie care nu suferă nici o modificare la adăugarea lichidului:

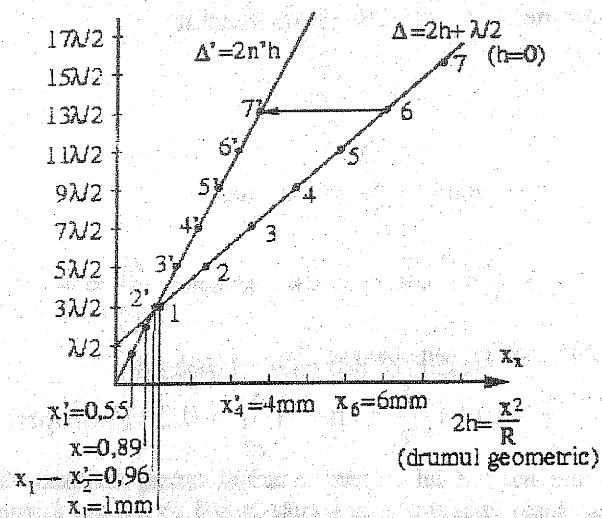


Fig. 42

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2} = 2n'h + 0 = \Delta', \text{ de unde: } 2h(n'-1) = \frac{\lambda}{2} = \frac{x^2}{R}(n'-1), \text{ deci:}$$

$$x = \sqrt{\frac{R\lambda}{2(n'-1)}} = 0{,}89\,\text{mm}.$$

Pentru inelul $2'$ $(k = 1)$:

$$2hn' = 3\frac{\lambda}{2} = \frac{x_2'^2}{R}n', \text{ deci: } x_2' = 0{,}96\,\text{mm} \langle x_1 = 1\,\text{mm};$$

Pentru inelul $7'$ $(k = 6)$:

$$2hn' = 3\frac{\lambda}{2} = \frac{x_2'^2}{R}n'\, x_7'^2 = \frac{13}{2n'}R\lambda = \frac{13}{2n'}x_1^2 = \frac{13}{2\frac{13}{8}} = 4x_1^2,$$

$$(x_7' = 2\,\text{mm}).$$

Deci poziţia inelului $7'$ (sistemul de franje obţinut când se adaugă lichid) va coincide cu poziţia inelului 4 (fără lichid); prin urmare la adăugarea lichidului inelele se îndesesc.

În general: $x_k' = \sqrt{2k+1}\,\frac{x_1}{\sqrt{2n'}}$, unde: $k = 0,1,2,\cdots$

Trebuie subliniat că datorită reflexiilor sticlă/lichid şi lichid/sticlă, fenomenul va fi mult mai puţin luminos. Pe de altă parte amplitudinea undelor ce interferă, deşi se micşorează mult reflexia, devin aproximativ egale, ceea ce determină creşterea contrastului figurii de interferenţă (se va demonstra luând în considerare coeficienţii de transmisie şi reflexie).

3. - Se suprimă lichidul şi se aşează faţa curbă a lentilei plan-convexe pe faţa concavă a unei lentile plan-concave de acelaşi indice de refracţie n, dar de curbură mai mică (fig. 43). Ce relaţie trebuie să existe între convergenţele C' şi C'' ale celor două lentile pentru ca primul inel negru să aibă acelaşi diametru ca şi în primul caz. Să se calculeze diametrul inelului de ordin k.

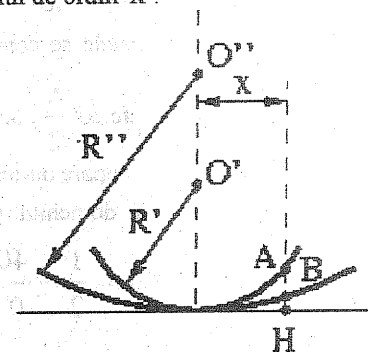


Fig. 43

R: Diferenţa de drum optic este: $\Delta = 2\overline{AB} + \frac{\lambda}{2} = 2h + \frac{\lambda}{2}$,

însă: $2\overline{AH} = \frac{x^2}{R'}$ şi $2\overline{BH} = \frac{x^2}{R''}$, de unde: $2\overline{AB} = x^2\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right)$.

Pentru a obţine acelaşi sistem de inele de interferenţă ca în primul caz este necesar ca: $\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''} = \frac{1}{R}$,

Dar: $C' = (n-1)\frac{1}{R'}$ şi $C'' = -(n-1)\frac{1}{R''}$, deci este necesar ca:

$$C = C' + C'' = 0{,}2915 \text{ dioptri}.$$

Diametrul inelului de ordin k:

$$2x_k = 2\sqrt{k}\sqrt{\frac{R'R''}{R''-R'}\lambda} = 2\sqrt{k}x_1 = 2\sqrt{k}\,\text{mm}.$$

4. - Revenind la sistemul din primul caz, să se explice ce se întâmplă când cele două suprafețe, care la început au fost în contact, se depărtează progresiv una de alta.

R: Să presupunem că la un moment dat distanța dintre placă și vârful lentilei este egală cu h_0, deci:

$$\Delta = 2(h+h_0)+\frac{\lambda}{2}.$$

Deci: $\delta\Delta = 2h_0$, iar ordinul de interferență $\Delta p = \frac{2h_0}{\lambda}2h_0$, indiferent de distanța h, deci și de x. Odată cu creșterea lui h_0 inelele se contractă, deplasându-se spre centru, unde dispar. De fiecare dată când h_0 crește cu $\frac{\lambda}{2}$, în centru dispare un inel, iar următorul îi ia locul, în timp ce la marginea lentilei apare un nou inel. Aspectul figurii de interferență nu se schimbă. Dacă h_0 variază în domeniul $(0 \div 2)\text{mm}$, ordinul de interferență în centru variză de la $0{,}5$ la $p_0 = \frac{1}{2}+\frac{4000}{0{,}55} = 0{,}5+7272{,}72$, adică în centru dispar 7272 inele întunecate.

5. - Distanța h_0 fiind egală cu $2\,\text{mm}$, se introduce dispozitivul sub un clopot de sticlă și se variază presiunea. Să se analizeze ce se întâmplă când se micșorează continuu presiunea până la zero. Se consideră $n_{aer} = 1{,}0003$, iar temperatura este constantă.

R: In centru, ordinul de interferență devine:

$$p_0' = \frac{1}{2}+\frac{2h_0}{n\lambda}, \text{ deoarece } \lambda_0 = n\lambda, \text{ unde: } n_{aer} = 1{,}0003.$$

$$p_0' = 0{,}5+\frac{7272{,}72}{1{,}0003} = 0{,}5+7270{,}54$$

(ordinul de interferență în prezența aerului).

Deci, când se face vid, în centru reapar două inele negre ($7271{,}5$ și $7272{,}5$) și două inele luminoase (7272 și 7273), iar al treilea inel luminos (7271) este pe cale de apariție. Celelalte inele ale tabloului de interferență se dilată. In același timp ele se răresc, dar într-un mod imperceptibil.

Intr-adevăr:

$$\Delta p = p - p' = \left(p-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) \cong p(n-1) = 3\cdot10^{-4}\,p \text{ (pentru p mare)}$$

Dacă $p = 7272$, atunci $\Delta p = 2{,}1816$, iar pentru $p = 7300$, $\Delta p = 2{,}19$ (pentru 28 de inele) prin urmare variația lui Δp, (deci și distanțarea inelelor) este foarte mică.

Inelele lui Newton. Variația temperaturii

1. - O lentilă subțire plan-convexă cu distanța focală egală cu $2\,\mathrm{m}$ este iluminată cu un fascicul paralel de lumină monocromatică, incident normal pe suprafața plană (fig. 44). Să se analizeze fenomenul de interferență obținut în lumină reflectată; să se arate că se obține un sistem de inele. Presupunând grosimea lentilei astfel încât la centru se obține maxim de intensitate, să se calculeze diametrele primelor cinci inele luminoase ($\lambda = 546\,\mathrm{nm}$, iar indicele de refracție al lentilei pentru această lungime de undă este $n = 1{,}52$).

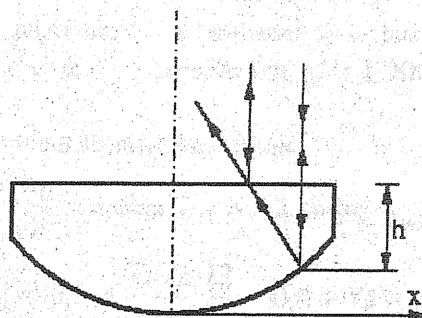


Fig. 44

R: Interferența are loc între cele două fascicule ce rezultă din reflexia pe cele două suprafețe. Amplitudinile celor două fascicule sunt sensibil egale. Deoarece sistemul prezintă aproape o simetrie cilindrică, figura de interferență este formată din inele al căror centru se află pe axa optică. Inelele sunt localizate pe suprafața plană a lentilei. Grosimea lentilei este în așa fel încât la centru se obține maxim de lumină. La o distanță x față de centru vom găsi un inel luminos, deci:

$\Delta = k\lambda$ (odată cu creșterea valorii mărimii x diferența de drum scade).

Deoarece:

$$2nh = k\lambda \text{ și } x^2 = (2R-h)h \cong 2Rh,$$

diametrul inelelor este:

$$2x = 2\sqrt{k}\sqrt{\frac{R\lambda}{n}} = 2\sqrt{k}\sqrt{\frac{n-1}{n}f\lambda} = 1{,}222\sqrt{k}\ \mathrm{mm},\ (R = (n-1)f).?$$

Mărimea diametrelor inelelor este: $1{,}222$; $1{,}728$; $2{,}116$; $2{,}444$; $2{,}732$. Lățimea spectrală a radiației $\lambda = 546\,\mathrm{nm}$ verde a Hg este suficient de mică astfel încât se poate obține un ordin de interferență de 770.000, tabloul de interferență fiind încă vizibil. Acestui ordin de interferență îi corespunde o diferență de drum optic egală cu:

$$\Delta = 770000 \cdot 546 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{cm} = 42{,}042\ \mathrm{cm}.$$

Grosimea lentilei la centru pote ajunge până la: $\dfrac{42}{2\cdot 1{,}52} \cong 14\,\mathrm{cm}$.

Lățimea liniei spectrale este: $\Delta\lambda = \dfrac{\lambda}{N} = \dfrac{5460\,\mathrm{A}}{770000} = 0{,}007\,\mathrm{A}$.

2.. - In locul lentilei plan convexe se utilizează o lentilă convergentă oarecare, de aceeși distanță focală (fig. 45). Să se arate că fenomenul rămâne același.

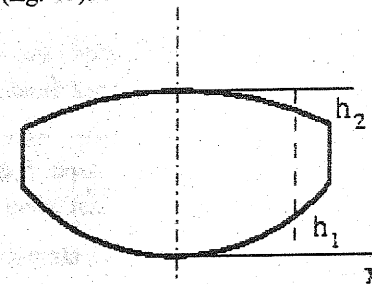


Fig. 45

R: Considerând relațiile:

$$\Delta = 2n(h_1 + h_2) = k\lambda \text{ și } x^2 \cong 2R_1h_1 + 2R_2h_2,$$

$$n x^2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=k\lambda \text{ și } \frac{1}{f}=(n-1)x^2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

se obține același rezultat: $2x^2=2\sqrt{k}\sqrt{\frac{n-1}{n}f\lambda}$.

3. - Să se analizeze ce se întâmplă când variază temperatura. Coeficientul de dilatare liniară a sticlei este $\alpha=9\cdot10^{-6}\ \text{grad}^{-1}$, iar indicele de refracție al sticlei crește cu $3\cdot10^{-6}$ la creșterea temperaturii cu $1^0\ C$. Să se calculeze variația temperaturii corespunzătoare apariției unui nou inel?

R: Diferența de drum optic la centru este: $\Delta-\frac{\lambda}{2}=2\,nh=k\lambda$.

Variația drumului optic determină variația temperaturii:

$$\delta\Delta=2h\left(\frac{n}{h}\frac{dh}{dT}+\frac{dn}{dT}\right)\Delta T=\lambda\Delta k.$$

Deoarece contribuția coeficienților $\alpha=\frac{1}{h}\frac{dh}{dT}=9\cdot10^{-6}\ \text{grad}^{-1}$ și $\frac{dn}{dT}=3\cdot10^{-6}\ \text{grad}^{-1}$, determină creșterea drumului optic, respectiv a ordinului de interferență, în centru vor apre inele noi, care ulterior se dilată. Un inel nou apare pentru $\Delta k=1$, deci:

$$2h\left(\frac{n}{h}\frac{dh}{dT}+\frac{dn}{dT}\right)\Delta T=\lambda.$$

De unde: $$\Delta T=\frac{\lambda}{2}\frac{1}{h\left(9\cdot10^{-6}n+3\cdot10^{-6}\right)}=5{,}46^0\ C$$

Inelele lui Newton. Dilatometru interferențial

1. - Un bloc de sticlă (B) cu fețele plan-paralele este așezat pe un suport plan S; deasupra lui B, pe tijele T de lungime egală, este așezată o lentilă L a cărei rază de curbură este mare. Intre lentila L și fața superioară a lui B se formează inelele lui Newton în lumină monocromatică (λ) (fig. 46). La temperatura de $0^0\ C$ grosimea blocului B este egală exact cu $1\,\text{cm}$, iar la temperatura t^0C t grosimea devine $e_0\left(1+10^{-5}t+10^{-8}t^2\right)$. Dilatarea suporților T se consideră neglijabilă. Se variază încet temperatura ansamblului în domeniul $(0\div100)^0\ C$. Să se descrie modificările observate în tabloul sistemului inelelor de interferență?

La $0^0\ C$, cu ajutorul unui dispozitiv de măsură, se stabilește că valoarea relativă a diametrelor primelor două inele negre la centru este egală cu 1 respectiv 2. Să se calculze din 10 în 10 grade numărul inelelor negre care apar la centru și diametrul primului inel. Care este raza reală a primului inel negru la temperatura de $0^0\ C$, dacă raza de curbură a lentilei este de $30\ \text{m}$? Cum intervine în calcul indicele de refracție al aerului, dacă valoarea lungimii de undă a radiației este dată pentru vid ($\lambda=500\,\text{nm}$)?

R: Sistemul de inele de interferență se observă în lumină reflectată sub incidență normală. Pentru aceasta se poate utiliza o lamă de sticlă *semi*transparentă așezată la 45^0, o prismă cu reflexie totală sau iluminarea și observarea se face sub un unghi mic față de normală. Inelele sunt localizate pe fața interioară a lentilei, iar observarea se face cu un ocular micrometric focalizat pe această față.

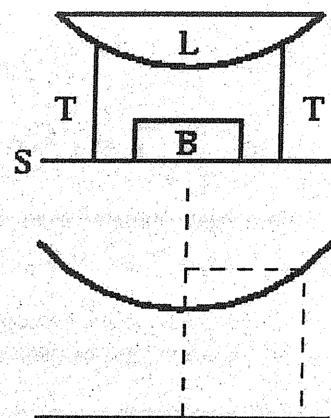


Fig. 46

La 0° C diferența de drum optic este:

$$\Delta' = 2a + \frac{\rho^2}{R} + \frac{\lambda}{2},$$

iar ordinul de interferență: $p' = \frac{\Delta'}{\lambda} = \frac{2a}{\lambda} + \frac{\rho^2}{R\lambda} + \frac{1}{2} = k' + \varepsilon'$.

Pentru simplificare vom considera:

$$\Delta = \Delta' - \frac{\lambda}{2} = 2a + \frac{\rho^2}{R}, \quad p = p' - \frac{1}{2} = \frac{2a}{\lambda} + \frac{\rho^2}{R\lambda} = k + \varepsilon,$$

unde ε și ε' sunt excedenții fracționari. In aceste condiții inelelor negre le vor corepunde numere p întregi (fig. 47).

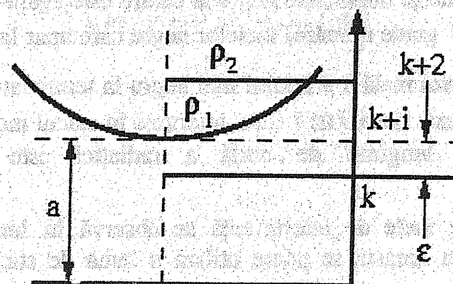


Fig. 47

La centru $(\rho = 0)$, se obține: $p_0 = \frac{2a}{\lambda} = k + \varepsilon_0$ (1).

Pentru primul inel întunecat:

$$\frac{2a}{\lambda} + \frac{\rho_1{}^2}{R\lambda} = k + 1 \qquad (2),$$

iar pentru al doilea inel întunecat:

$$\frac{2a}{\lambda} + \frac{\rho_2{}^2}{R\lambda} = k + 2,$$

de unde se obține: $\frac{\rho_2{}^2 - \rho_1{}^2}{R\lambda} = 1$, însă: $\rho_2 = 2\rho_1$, deci: $\rho_2{}^2 = \frac{R\lambda}{4} 2\rho_1$.

Diferența $(2)-(1)$ conduce la: $\frac{\rho_1{}^2}{R\lambda} = 1 - \varepsilon_0 = \frac{1}{3}$, deci: $\varepsilon_0 = \frac{2}{3}$. Insă trebuie considerată și întârzierea introdusă de reflexia pe suprafața sticlă/aer, deci:

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Raza primului inel: $\rho_1 = \sqrt{\frac{R\lambda}{3}} = 2{,}23606$.

Dacă se încălzește blocul B de sticlă, atunci mărimea e crește, corespunzător a scade și, deoarece: $\Delta = 2a + \frac{\rho^2}{2R} = k\lambda$, ρ crește, deci inelele se "dilată". Câte inele vor apare la centru tot atâtea vor dispare la margine.

Dacă $\Delta e = \frac{\lambda}{2}$, atunci $\Delta a = -\frac{\lambda}{2}$, iar $-\Delta p = -1$, prin urmare fiecare inel nou ce apare va ocupa exact locul precedentului care s-a dilatat.

Deci:

$$-\Delta p = \frac{2\Delta e}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}(e_t - e_0) = \frac{2e_0}{\lambda}\left(10^{-5}t + 10^{-8}t^2\right) =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^4}{0{,}5}\left(10^{-4}m + 10^{-6}m^2\right) = 4m + \frac{4m^2}{100},$$

deoarece considerăm variația temperaturii din 10 în 10 grade ($\Delta t = 10m$). Variația numărului de inele va fi următoarea:

Anterior s-a stabilit că la $0^o C$: $\frac{\rho_1^2}{R\lambda} = 1 - \varepsilon$, respectiv la $t^o C$:

$\frac{\rho_1'^2}{R\lambda} = 1 - \varepsilon'$, de unde: $\frac{\rho_1'}{\rho_1} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon'}{1-\varepsilon}} = \sqrt{3(1-\varepsilon')}$.

Dacă valoarea indicelui de refracție al aerului la $0^o C$ se consideră egală cu 1,0003 în loc de valoarea 1 așa cum s-a considerat mai sus atunci valoarea razei inelelor de interferență se modifică puțin, însă nu se modifică valoarea excedentului fracționar ε_0.

$m = 0$	$p = 0$	$p = k + \frac{2}{3}$	numărul de inele care apare la centru	$\frac{\rho_1'}{\rho_1} = \frac{1-\varepsilon'}{1-\varepsilon}$
1	4,04	$k - 4 + \underbrace{\left(\frac{2}{3} - 0{,}04\right)}_{\varepsilon_0}$	4	1,058
2	8,16	$k - 8 + 0{,}50$	4	1,224
3	12,36	$k - 12 + 0{,}30$	4	1,442
4	16,64	$k - 16 + 0{,}02$	4	1,708
5	21	$k - 21 + 0{,}66$	5	1
6	25,44	$k - 25 + 0{,}22$	4	1,524
7	29,96	$k - 30 + 0{,}70$	5	0,937
8	34,56	$k - 34 + 0{,}10$	4	1,637
9	39,24	$k - 39 + 0{,}42$	5	1,315
10	44	$k - 44 + 0{,}66$	5	1

In acest caz: $\rho_1' = \sqrt{\frac{R\lambda_0}{3n}}$, iar dacă se logaritmează și diferențiază, se obține:

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1} = -\frac{1}{2}\frac{dn}{n} = -15 \cdot 10^{-5}.$$

Deci: $\rho_1' = \rho_1 + d\rho_1 = \rho_1\left(1 - 15 \cdot 10^{-5}\right) = 2{,}23586\,\text{mm}$

Dacă crește temperatura trebuie considerat faptul că indicele de refracție al aerului variază cu temperatura conform legii lui Gladston: $\frac{n-1}{d} = ct$, unde d reprezintă densitatea aerului. Pentru un gram de aer considerat drept gaz perfect avem: $pV = \frac{p}{d} = RT$.

La presiune constantă: $dT = ct$, deci:

$$(n-1)T = ct = (n_0 - 1)T_0,$$

de unde: $$n = 1 + (n_0 - 1)\frac{T_0}{T} = 1 + 3 \cdot 10^{-4}\,\frac{273}{273 + t}.$$

Toate rezultatele se vor modifica deoarece Δp depinde de n prin intermediul lungimii de undă.

2. - Fețele plane ale aceleeași lame B se *semi*arginteză. Utilizându-se acestă lamă se obțin inele de interferență localizate la infint și se măsoară diametrele lor. La $0^o C$ primele două inele luminoase de la centru au diametrele relative $\sqrt{2}$, respectiv $\sqrt{7}$. Se încălzește lama la $10^o C$; se observă că 8 inele defilează la centru, iar diametrul relativ al primelor doua inele centrale devine 1, respectiv $\sqrt{3}$. Considerând faptul că valoarea indicelui de refracție al lamei de sticlă la $0^o C$ este $1{,}50 \pm 2 \cdot 10^{-5}$, să se calculeze variația acestuia în domeniul $(0 \div 10)^o C$.

R: Pentru observarea inelelor de interferență la infinit se poate utiliza dispozitivul optic prezentat schematic în fig. 48.

Diferența de drum între R_1 și R_2 este:

$$\Delta = 2nh\cos r = 2nh\left(1 - 2\sin^2\frac{r}{2}\right) \cong 2nh\left(1 - \frac{i}{2n}\right),$$

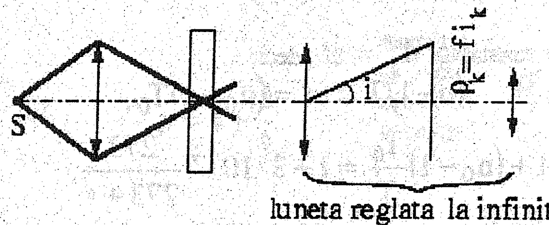
iar ordinul de interferență: $p = \frac{2nh}{\lambda} - \frac{h}{n\lambda}i^2$, de unde rezultă că atunci când crește valoarea unghiului de incidență i, valoarea ordinului de interferență se micșorează.

In centrul câmpului se obţine: $p_0 = \dfrac{2nh}{\lambda} = k + \varepsilon_0$;

Pentru primul inel de interferenţă: $\dfrac{2nh}{\lambda} - \dfrac{h}{n\lambda} i_1^2 = k$;

Pentru al doilea inel: $\dfrac{2nh}{\lambda} - \dfrac{h}{n\lambda} i_2^2 = k - 1$.

De unde: $\dfrac{h}{n\lambda}\left(i_2^2 - i_1^2\right) = 1$, dar: $\dfrac{i_2}{i_1} = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$, deci: $i_2^2 = \dfrac{2}{5}\dfrac{n\lambda}{h}$.



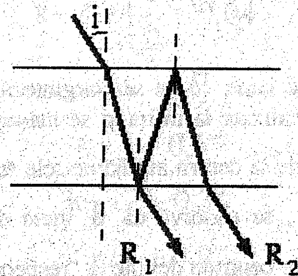


Fig. 48 Fig. 49

La fel: $\varepsilon_0 = \dfrac{h}{n\lambda} i_1^2 = \dfrac{2}{5}$.

Un calcul analog permite determinarea noului ordin de interferenţă atunci când temperatura creşte cu $10^\circ C$.

Deoarece: $\dfrac{i_2'}{i_1'} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$, se obţine:, $i_2'^2 - i_1'^2 = 2 i_1'^2$ şi $2 i_1'^2 \dfrac{h'}{n'\lambda} = 1$, deci:

$\varepsilon_0' = \dfrac{h'}{n'\lambda} i_1^2 = \dfrac{1}{2}$, şi se mai observăcă în centru "defilează" 8 inele. In problemă

nu se subliniază dacă inelele se dilată sau se contractă, ambele cazuri fiind posibile funcţie de proprietăţile sticlei.

Să presupunem că ordinul de interferenţă creşte la centru: iniţial a fost $k + 0,4$ şi a devenit $k + 8 + 0,5$, deci: $\delta p_0 = 8,1$.

Deci: $\delta\Delta = \lambda \delta p_0 = \delta(2nh) = 2h_0 \Delta n + 2n_0 \Delta h$ sau:

$$8,1 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}\,\text{mm} = 2 \cdot 10n + 2n_0 \cdot 10\left(10^{-4} + 10^{-6}\right),$$

unde: $\delta h_0 = h_0 \delta t = 10\text{mm}\left(10^{-5}\,\text{gr}^{-1}\,10\text{gr} + 10^{-8}\,\text{gr}^{-2}\,100\,\text{gr}^{-2}\right)$.

Deci: $\delta n = \left(0,51 \pm 2,02 \cdot 10^{-5}\right) \cdot 10^{-4}$.

Dacă se consideră că la centru ordinul de interferenţă scade: a fost $k + 0,4$ şi devine $k - 8 + 0,5$, deci $\delta p_0 = -7,9$, atunci se obţine:

$$\delta n = -\left(3,49 \pm 2,02 \cdot 10^{-6}\right) \cdot 10^{-4}.$$

Măsurarea unghiurilor mici prin metode interferenţiale

Un indicator de poziţie orizontală este format dintr-o cuvă cilindrică a cărei parte inferioară este convexă spre interior şi conţine un strat subţire de ulei. Partea convexă este argintată şi poate reflecta un fascicul de lumină mononcromatică ($\lambda = 560\,\mathrm{nm}$), incident normal pe stratul de ulei ($n = 1{,}4$). In acest dispozitiv se formează inelele lui Newton; grosimea stratului de ulei este aleasă astfel încât centrul sistemului de inele este negru. Pe partea inferioară a cuvei este trasat un reper care coincide cu centrul inelelor dacă dispozitivul este aşezat pe o suprafaţă orizontală. Dacă surprafaţă prezintă o înclinare α, atunci sistemul se inele se deplasează în raport cu reperul şi se măsoară raportul dintre această deplasare x şi raza ρ a primului inel. Se notează cu R raza de curbură a părţii inferioare a cuvei.

1. - Să se determine expresia razei ρ în funcţie de R, λ şi n.

R: Pentru a obţine un contrast maxim al figurii de interferenţă (vizibilitate maximă) partea inferioară a cuvei este *semi*argintată, ceea ce asigură egalitatea aproximativă a intensităţii fasciculului reflectat pe stratul de ulei cu cea a celui reflectat pe partea inferioara a cuvei. La o distanţă oarecare ρ de axa cuvei, grosimea stratului de ulei este egală cu (fig. 50):

$$\rho^2 = y(2R - y) \cong 2Ry,$$

iar diferenţa de drum optic: $\Delta = 2ny = \dfrac{n\rho^2}{R}$.

Deoarece grosimea stratului de ulei la centru (pentru $\alpha = 0$) are o valoare astfel încât centrul inelelor de interferenţă este negru, atunci când se trece de la centrul inelelor la primul inel întunecat se poate scrie:

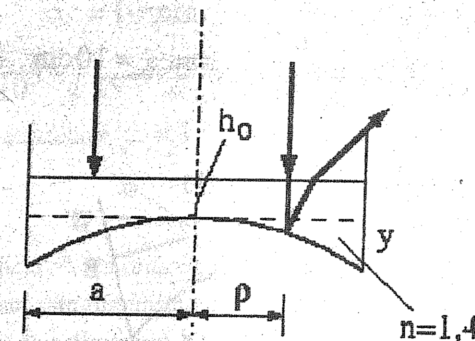


Fig. 50

$$\Delta = \lambda = \frac{n\rho_1^2}{R}, \text{ de unde: } \rho_1 = \sqrt{\frac{R\lambda}{n}}.$$

Raza următoarelor inele negre este dată de relaţia:

$$\rho_k = \sqrt{k}\sqrt{\frac{R\lambda}{n}},$$

adică spre margini inelele se îndesesc.

2. - Să se exprime raportul dintre înclinarea α şi valoarea măsurată $\dfrac{x}{\rho}$. Să se arate că este indicată o valoare R cât mai mare posibil.

R: Atunci când dispozitivul nu se află pe un plan orizontal, suprafaţa AOB (orizontală) a uleiului ocupă poziţia $A'OB'$ (fig. 51). Centrul inelelor de interferenţă se deplasează din C' (unde se află trasat reperul) în C, deplasarea fiind egală cu:

$$x = R\sin\alpha \cong R.$$

Grosimea stratului de ulei corespunzătoare centrului figurii de interferenţă se modifică foarte puţin dacă unghiul α este mic:

$$R + h_0' = (R + h_0)\cos\alpha \cong R + h_0.$$

Prin urmare centrul figurii de interferenţă rămâne tot întunecat, iar raza primului inel nu se schimbă. Deci:

$$\frac{x}{\rho_1} = \alpha R\sqrt{\frac{n}{R\lambda}} = \alpha\sqrt{\frac{nR}{\lambda}}, \text{ de unde: } \frac{\alpha}{x/\rho} = \sqrt{\frac{\lambda}{nR}} = \frac{1}{s}.$$

Pentru a sesiza o valoare cât mai mică a înclinării α, este necesar ca sensibilitatea s, proporțională cu $\sqrt{R}$, să fie cât mai mare. Însă creșterea mărimii R determină creșterea lui ρ_1 care este limitată de raza (a) a cilindrului, adică:

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{R\lambda}{n}} \langle a \text{, de unde: } R\langle \frac{na^2}{\lambda} \text{, pentru } a = 10\text{cm}, \ R\langle 25\text{km}.$$

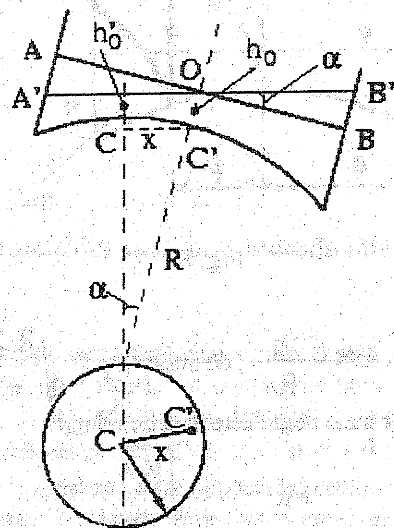


Fig. 51

Pe de altă parte atunci când ρ crește, inelele devin din ce în ce mai puțin nete din cauza repartiției luminii în interiorul figurii de interferență și, ca urmare, evaluarea mărimii $\frac{x}{\rho}$ devine mai dificilă. In plus, pentru ca centrul figuri de interferență să rămână întunecat este necesar ca variația grosimii peliculei de ulei la centru să fie neglijabilă:

$$(R+h_0)-(R+h'_0)\cos\alpha = (R+h_0)-(R+h_0)\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right) \cong \frac{R\alpha}{2}.$$

In acest caz variația ordinului de interferență trebuie să îndeplinească condiția:

$$dp = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2R\alpha^2}{2\lambda} \langle \frac{1}{50}.$$

Pentru $\alpha = 1'' = 4{,}85\cdot10^{-6}$ rad este necesar ca $R\langle 400\text{m}$.

3. - Se consideră $\rho_1 = 10\text{mm}$. Să se analizeze dacă se poate pune în evidență o înclinare de $\alpha = 1''$ față de orizontală.

R: Dacă $\rho_1 = 10\text{mm}$ rezultă: $R = \frac{n\rho_1^2}{\lambda} = 250\text{m}$, deci

$x = R\alpha = 250\cdot10^3\cdot4{,}85^{-6} = 1{,}21\text{mm}$, prin urmare se poate pune în evidență cu ușurință o înclinare $\alpha = 1''$ față de orizontală.

//////

O pană de sticlă A cu indicele de refracție $n = 1{,}5$ și cu fețele *semi*argintate și foarte puțin înclinate este iluminată de un fascicul paralel de lumină monocromatică cu $\lambda = 500\text{nm}$ dat de colimatorul SL_1. Fixând ochiul în focarul O al lentilei L_2, pe lamă se observă franje de egală grosime. Această lamă face parte dintr-un echipaj, mobil în jurul unei axe verticale, destinat măsurării unor deviații mici. Muchia penei A este orientată vertical. Se notează cu i unghiul de incidență și cu θ unghiul de rotație necesar pentru a face ca o franjă să trecă prin fața unui reper trasat pe lamă atunci când aceasta se rotește (fig. 52).

1. - Să se evalueze unghiul θ funcție de n, h, λ și i. Se consideră: $h = 1\text{cm}$, $i = 30^o$, $i = 45^o$, $i = 60^o$.

R: Diferența de drum geometric pentru două raze transmise și care interferă în pana de sticlă este: $\Delta = 2nh\cos r$. Franjele sunt rectilinii, paralele cu muchia și sunt localilzate pe pană, iar pentru a le observa, trebuie acomodat ochiul. Deoarece interferă o rază transmisă și una reflectată, pentru ca intensitățile acestor raze să fie aproximativ egale este necesar ca fețele lamei să fie semiargintate.

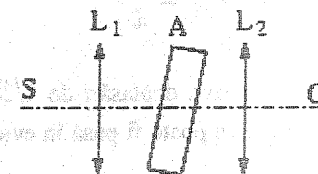


Fig. 52

Diferența de drum Δ, pentru o incidență dată, depinde, prin intermediul lui h, de distanța de la muchia prismei la locul de incidență. Când lama se rotește în jurul unui ax vertical Z se regăsește aceeași stare de interferență în fiecare punct, de fiecare dată când Δ variază cu λ.

$$\Delta = 2nh\cos r = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$, considerând: $\sin i = n \sin r$.

Dacă lama se rotește, unghiul de incidență variază și:

$$d\Delta = \frac{2h \sin i \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} di$$, de unde: $$dp = \frac{h}{\lambda} \frac{\sin 2i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} di.$$

Atunci când ordinul de interferență variază cu unitatea $dp = 1$, unghiul de incidență variază cu $d\alpha = \theta$, deci:

$$\theta = \pm \frac{h}{\lambda} \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\sin 2i}.$$

Deoarece este urmărită variația ordinului de interferență față de un reper trasat pe lamă, se poate considera $h = ct$. Dacă $h = 1cm$ și $i = 30^o; 45^o; 60^o$, valorile unghiului θ sunt corespunzător: $\theta = 16''8; 13''6; 14''6$.

2. - Fie dp variația ordinului de interferență într-un punct al lamei produsă de o rotație mică di. Să se construiască curba sensibilității:

$$y = \frac{\lambda}{h} \frac{dp}{di} = F(i).$$

R: Din relațiile de mai sus rezultă $di = \theta dp$, deci:

$$y = \frac{\lambda}{h} \frac{dp}{di} = \frac{\lambda}{h} \frac{1}{\theta} = \frac{\sin 2i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Reprezentarea grafică este dată in fig. 53?. Se observa că maximul de sensibilitate corespunde aproximativ la $i = 50^o$, iar $y_M \cong \frac{3}{4}$.

3. - Considerând că se pot observa deplasări de $i/50$ dintr-o franjă, să se determine care este cea mai mică rotație ce poate fi pusă în evidență. Să se compare cu alte metode.

R: Deoarece $dp = \frac{1}{50}$ se obține:

$$d\alpha = \frac{\lambda}{h} \frac{dp}{y_m} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{10} \frac{4}{3 \cdot 50} = \frac{4}{3} \cdot 10^{-6} \text{ rad}.$$

In cazul oglinzilor rotitoare: considerăm o oglindă cu raza de curbură egală cu $2m$, iar lectura se face pe o riglă divizată în $0{,}1mm$, deci:

$$d\alpha' = \frac{\lambda}{h} \frac{dp}{y_m} = \frac{1}{2} \frac{1}{10} \frac{1}{2000} = \frac{10^{-4}}{4} \text{rad}.$$

Raportul $\frac{d\alpha'}{d\alpha} \cong 20$, deci această metodă este de 20 de ori mai sensibilă decât metoda oglinzii rotitoare.

Interferometrul Michelson - 1

Un interferometru Michelson este iluminat de o sursă luminoasă punctuală S. Oglinzile M_1 şi M_2 ale interferometrului sunt aşezate la o distanţă D de punctul I, care reprezintă punctul de întâlnire cu o placă *semi*argintată G al unei raze ce pleacă din S şi este normală pe oglinda M_1. Sursa S faţă de punctul I de asemenea se află la distanţa D. Oglinzile M_1 şi M_2 sunt perpendiculare între ele, iar lama G este dispusă sub un unghi de 45^o faţă de cele două oglinzi (fig. 53). Oglinzile M_1 şi M_2 se rotesc cu acelaşi unghi α mic, în acelaşi sens în jurul axelor O_1 şi O_2 perpendiculare pe figură. Nu se vor considera efectele reflexiei pe lama G, precum şi de transmisia acesteia.

1. - a) Cum sunt dispuse imaginile S_1 şi S_2 ale sursei S din care par a proveni fasciculele emergente ce interferă?

R: Sursa S este punctiformă deci şi imaginile S_1 şi S_2 date de sistemul format din lama G şi oglinzile M_1 şi M_2 vor fi punctiforme. Când oglinzile sunt perpendiculare sistemul prezintă maximul de simetrie. Imaginea M_1' a oglinzii M_1 faţă de lama divizoare G coincide cu oglinda M_2, iar imaginea lui S faţă de aceeaşi lamă G se obţine în punctul H astfel încât, $SI = IH = D$. Dacă O_2 reprezintă "centrul" oglinzii M_2 atunci $HO_2 = 2D$. Faţă de oglinda M_2 (respectiv faţă de imaginea M_1') se formează imaginea lui S (respectiv a lui H) în punctul S' situat la distanţa $O_2S' = 2D$. Când oglinzile M_1' şi M_2 se rotesc în sens invers cu acelaşi unghi α, razele O_2S' se rotesc în jurul lui O_2 cu $2\alpha = OO_2S_1 = OO_2S_2$, unde S_1, S_2 şi S' se află pe acelaşi cerc cu raza egală cu $2D$. Din fig. 54 se observă că unghiul $IHS_1 = \alpha$.

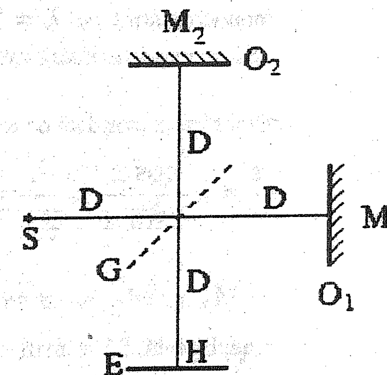


Fig. 53

1. - b) Să se calculeze în funcţie de D şi α distanţa S_1S_2 şi distanţa OH până la ecranul E situat la distanţa D faţă de punctul I. Se va considera $D = 1\,m$ şi $\alpha = 1^o$.

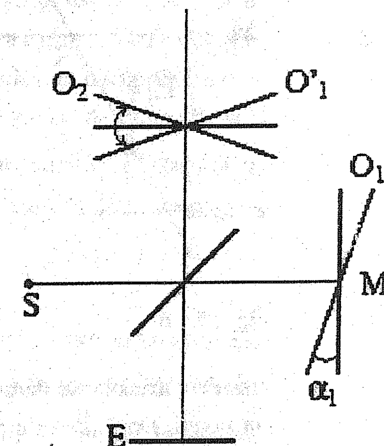


Fig. 54

R: $S_1S_2 = 4D\sin 2\alpha = 0{,}14\,\text{mm}$;

$$OH = OO_2 + O_2H = 2D(1+\cos 2\alpha) = 4D\cos^2\alpha = 4\,\text{m}$$

$$(\text{sau } OH = \frac{S_1S_2}{2}\frac{1}{\tan\alpha} = 4D\cos^2\alpha).$$

2. - Sursa S emite radiație monocromatică cu $\lambda = 500\,\text{nm}$ și se observă franjele de interferență pe ecranul E. Să se exprime interfranja în funcție de unghiul α și să se calculeze valoarea acesteia.

R: Conform relației generale, interfranja este dată de relația:

$$i = \lambda\frac{OH}{S_1S_2} = \lambda\frac{4D\cos^2\alpha}{4D\sin 2\alpha} = \lambda\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha} \cong \frac{\lambda}{2\alpha} = 14{,}29\mu\text{m}.$$

3. - Intre lama G și oglinzile M_1 și M_2 se introduc filtrele de polarizare P_1 și P_2 a căror grosime se presupune neglijabilă. Să se analizeze:

a) Care estre fenomenul observat pe ecranul E dacă oscilațiile transmise de P_1 și P_2 sunt paralele sau perpendiculare.

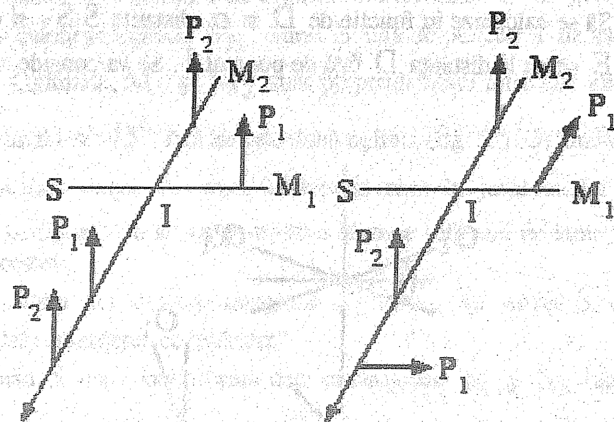


Fig. 55 a,b

R: Direcția oscilațiilor transmise de către filtrele de polarizare, atât la ducere cât și la întoarcere, este reprezentată prin săgeți. Dacă P_1 este paralel cu P_2 (axele de transmisie maximă ale celor două filtre de polarizare sunt paralele între ele), atunci și oscilațiile vor fi paralele (de asemenea coerente între ele) și, prin urmare, aspectul câmpului de interferență nu se va modifica (fig. 55 a). Dacă P_1 este perpendicular pe

P_2 câmpul este iluminat unform (fig. 55 b). In acest caz se compun oscilații reciproc perpendiculare de aceeași amplitudine. Cele două oscilații nu sunt coerente.

b) Considerăm filtrele de polarizare încrucișate (P_1 este perpendicular pe P_2), iar între S și I se introduce filtrul de polarizare P a cărui axă optică formează un unghi de 45^o cu axele optice P_1 și P_2. Care este noul aspect al câmpului de interferență?

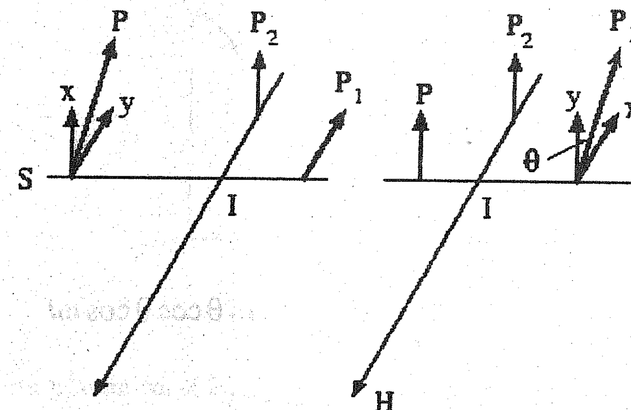


Fig. 56 a,b

R: Câmpul va fi iluminat uniform. Filtrul de polarizare P va asigura coerența oscilațiilor transmise de P_1 și P_2, dar aceste oscilații vor fi perpendiculare. Pentru a reobține franjele de interferență este necesar ca între punctul I și ecranul E să se introducă un nou filtru de polarizare a cărui axă optică să nu fie paralelă cu P_1 sau P_2. Acest filtru va asigura paralelismul oscilațiilor celor două fascicule ce interferă.

4. - Vibrațiile transmise de către P și P_2 sunt ambele perpendiculare la planul figurii, însă cele transmise de P_1 fac un unghi θ cu precedentele. Care este repartiția iluminării pe ecranul E? Analiza se va face calculând contrastul $\gamma = \frac{I_M - I_m}{I_M}$ funcție de unghiul θ.

R: Dacă planul fig. 57 este orizontal, atunci axa y este perpendiculară la acesta. Oscilațiile P și P_2 sunt paralele între ele și paralele cu axa y. Dacă a este amplitudinea inițială a oscilației, atunci la ieșirea din filtrul P_1 amplitudinea va fi $a\cos\theta$, amplitudine ce este reflectată din nou de oglinda M_1 prin filtrul P_1. Prin urmare, de la oglinda M_1 spre H vor proveni oscilațiile:

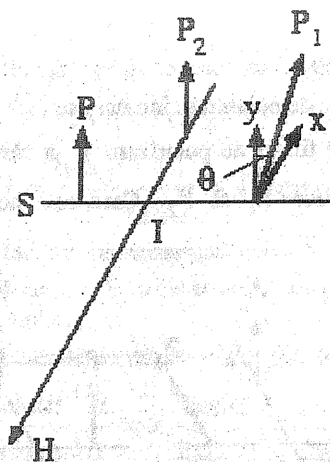


Fig. 57

$$y_1 = a\cos^2\theta\cos\omega t \text{ și } x_1 = a\sin\theta\cos\theta\cos\omega t$$

(considerăm faza $\varphi_1 = 0$).

De la oglinda M_2 va veni în aceeași direcție oscilația:

$$y_2 = a\cos(\omega t - \varphi)$$

(faza φ va depinde de poziția punctului H pe ecranul E).

Compunerea oscilațiilor paralele și coerente y_1 și y_2 va da intensitatea:

$$I_y = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = a^2\cos^4\theta + a^2 + 2a^2\cos^2\theta\cos\varphi$$

iar intensitatea totală într-un punct al ecranului E va fi:

$$I = I_y + I_{x_1} = a^2\left(1+\cos^2\theta\right) + 2a^2\cos^2\theta\cos\varphi.$$

De unde pentru pozițiile punctului H pe ecranul E pentru care:

$\varphi = 2k\pi$, se obține: $I_M = a^2\left(1+3\cos^2\theta\right)$

$\varphi = (2k+1)\pi$, se obține: $I_m = a^2\left(1-\cos^2\theta\right)$,

de unde: $$\gamma = \frac{I_M - I_m}{I_M} = \frac{4\cos^2\theta}{1+3\cos^2\theta} = \begin{cases} 1 & \theta = 0, \pi \\ 0 & \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ (fig. 58).}$$

În cazul $\theta = \frac{\pi}{2}$, axele de transmisie maximă ale filtrelor P și P_1 sunt perpendiculare, deci unul din fasciculele ce interferă (P_1) dispare, iar ca rezultat câmpul de interferență apare uniform iluminat deci $\gamma = 0$.

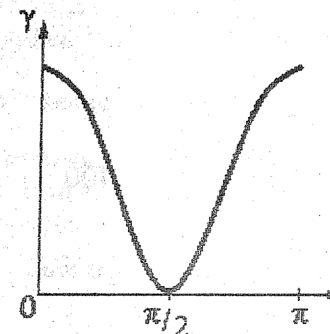


Fig. 58

5. - Se înlătură cei trei polaroizi și se presupune $\varepsilon = 0$. Oglinda M_2 se îndepărtează față de I la o distanță D+ d. Să se calculeze raza inelelor de interferență obținute pe ecranul E. Considerând radiația armonică $\lambda = 500\,\text{nm}$ și $d = 0{,}1\,\text{mm}$, să se calculeze raza primului inel luminos (Fig. 59).

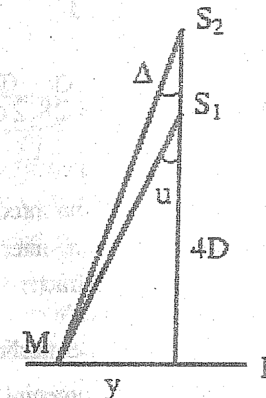


Fig. 59

R: Deoarece M_2 și imaginea M_1' a oglinzii M_1 sunt paralele dar distanțate cu d, imaginile punctiforme ale lui S (S_1 și S_2) se vor afla față de ecranul

E la distanța $4\mathrm{D}$ și $4\mathrm{D}+2\mathrm{d}$. Intr-un punct M situat pe ecranul E la distanța y față de "centru", diferența de drum optic este:

$$\Delta = \mathrm{S_2M}-\mathrm{S_1M} = \mathrm{S_2S_1}\cos u \cong 2\mathrm{d}\left(1-\frac{u^2}{2}\right) = 2\mathrm{d}\left(1-\frac{y^2}{32\mathrm{D}^2}\right),$$

unde: $u = \dfrac{y}{4\mathrm{D}}$.

Ordinul de interferență la centru ($y = 0$) este:

$$\mathrm{k_0} = \frac{2\mathrm{d}}{\lambda} = \frac{200}{0{,}5} = 400,$$

iar când y crește, ordinul de interferență scade:

$$\mathrm{k} = \mathrm{k_0}\left(1-\frac{y^2}{32\mathrm{D}^2}\right).$$

Se obțin inele luminoase pentru:

$$\mathrm{k} = \mathrm{k_0}\left(1-\frac{y^2}{32\mathrm{D}^2}\right)\frac{y^2}{32\mathrm{D}^2} = \frac{\mathrm{k_0}-\mathrm{k}}{\mathrm{k_0}} = (\mathrm{k_0}-\mathrm{k})\frac{\lambda}{2\mathrm{d}}, \text{ de unde:}$$

$$y = 4\mathrm{D}\sqrt{(\mathrm{k_0}-\mathrm{k})\frac{\lambda}{\mathrm{d}}}.$$

Pentru primul inel luminos:

$$\mathrm{k} = 399 \text{ și } y_1 = 4\mathrm{D}\sqrt{\frac{\lambda}{\mathrm{d}}} = 28{,}2\,\mathrm{cm}.$$

6. - Se consideră dispozitivul din problema precedentă, însă sursa emite lumină albă, iar $\mathrm{d} = \mathrm{D}$. Care este aspectul tabloului de interferență? In locul ecranului E se plasează fanta unui spectroscop cu rețea de difracție (dispersia proporțională cu lungimea de undă), în așa fel încât centrul fantei coicide cu axa sistemului (punctul H). Considerăm axa $\mathrm{O}y$ paralelă cu fanta, iar $\mathrm{O}x$ perpendiculară pe fantă. Care este numărul de caneluri întunecate ce apar în spectru în domeniul $\lambda = (400 \div 800)\mathrm{nm}$, dacă înalțimea fantei este egală cu $2\,\mathrm{cm}$. Lățimea se consideră infinit îngustă.

R: Pentru $y = 0$, diferența de drum optic la "centru": $\Delta = 2\mathrm{D} = 2\mathrm{m}$. Diferența de drum fiind foarte mare nu se pot observa inele de interferență. Câmpul apare uniform iluminat, însă este iluminat de un "*alb de ordin superior*", care poate fi pus în evidență dacă radiația este analizată cu un spectroscop. In planul E fanta

spectroscopului este paralelă cu $\mathrm{O}y$, iar dispersia are loc după axa $\mathrm{O}x$. Deoarece $\mathrm{d} = \mathrm{D}$, diferența de drum este:

$$\Delta = 2\mathrm{D}\cos u = 2\mathrm{D}\left(1-\frac{u^2}{2}\right) \cong 2\mathrm{D}-\frac{y^2}{25\mathrm{d}}, \text{ deoarece: } u = \frac{y}{5\mathrm{D}},$$

(se consideră o valoare medie).

Inelele negre apar pentru: $\Delta = (2\mathrm{p}+1)\dfrac{\lambda}{2}$, iar fanta spectroscopului le vor secționa. Deoarece spectroscopul este cu rețea, fiecare punct negru de pe înălțimea fantei se va afla în planul focal al spectroscopului la o distanță față de axa optică egală cu: $x = \mathrm{A}\lambda$. Pentru o valoare p dată, ansamblul punctelor negre de pe fantă desenează caneluri negre a căror ecuație se obține eliminând parametrul λ:

$$x = \mathrm{A}\lambda = \mathrm{A}\frac{2\Delta}{2\mathrm{p}+1} = \frac{\mathrm{A}}{2\mathrm{p}+1}\left(4\mathrm{D}-\frac{2y^2}{25\mathrm{D}}\right).$$

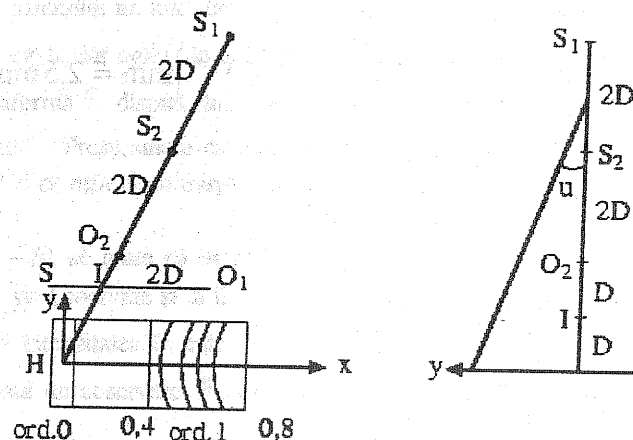


Fig. 60

(fiecărei valori p îi corespunde o parabolă, fig. 60). Pentru $y = 0$ ordinul de interferență $\mathrm{p} = \dfrac{2\mathrm{D}}{\lambda}$ variază între $\dfrac{2000}{4\cdot 10^{-4}} = 5\cdot 10^6$ (pentru $\lambda = 400\,\mathrm{nm}$) și $2{,}5\cdot 10^6$ (pentru $\lambda = 800\,\mathrm{nm}$). Deci vor apare un număr de aproximativ $2{,}5\cdot 10^6$ parabole. Dacă diferența de drum este mai mică, parabolele apar mai rare.

7. - Sursa emite radiația armonică $\lambda = 500\,\text{nm}$, iar coeficientul de finețe al liniei spectrale este $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 10^4$. Care este valoarea maximă a lui d pentru care încă este posibilă observarea fenomenului în centrul figurii de interferență?

R: Franjele nu vor mai fie vizibile atunci când poziția maximului pentru lungimea de undă λ va coincide cu poziția pentru lungimea de undă $\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}$, deci:

$$p = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda} \text{ (maxim) și } p - \frac{1}{2} = \frac{\Delta}{\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}} = \frac{2d}{\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}} \text{ (minim)}$$

($\Delta\lambda$ reprezintă lățimea liniei spectrale) de unde:

$$\Delta p = \frac{\Delta}{\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}} = \frac{2d}{\lambda} - \frac{2d}{\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}} = \frac{2d\Delta\lambda}{\lambda(2\lambda + \Delta\lambda)} = \frac{1}{2}$$

de unde:

$$d = \frac{\lambda}{2}\frac{\lambda}{\Delta\lambda} + \frac{\lambda}{4} = \left(\frac{0{,}5}{2}10^{-3} \cdot 10^{-4} + \frac{0{,}5}{4}10^{-3}\right)\text{mm} = 2{,}5\,\text{mm}.$$

Interferometrul Michelson -2

Considerăm un interferometru Michelson reglat astfel încât distanțele IM_1 și IM_2 sunt egale, iar oglinzile M_1 și M_2 sunt perpendiculare la IM_1 și IM_2. O sursă punctiformă S dispusă în focarul obiectivului L_1 emite radiația monocromatică $\lambda = 500\,\text{nm}$. Presupunem că lama G intervine numai ca divizor de fascicul, iar coeficientul ei de reflexie și transmisie pentru intensitate este egal cu $0{,}5$.

1. - Să se arate că în acest dispozitiv două unde plane care se propagă în direcția IP sunt coerente și în fază. Dacă I_0 reprezintă intensitatea emisă de sursă, să se calculeze intensitatea în cele două fascicule? Oviectivul L_2 proiectează oglinda M_1 în planul de observare P. Care este aspectul câmpului de interferență în acest plan?

R: Deoarece sursa punctiformă S se află în centrul focarului lentilei L_1, în interiorul interferometrului, până la lentila L_2, se propagă unde plane. Intrucât toate razele pleacă de la același punct luminos, peste tot vibrațiile vor fi coerente. Fiecare din cele două fascicule ce se suprapun în regiunea IP au suferit o transmisie și o reflexie pe lama G precum și o reflexie pe oglinda M_1, respectiv M_2 (a căror coeficient de reflexie este considerat egal cu unitatea). In același timp drumurile optice parcurse de cele două fascicule sunt egale $IM_1 = IM_2$ (fig. 61). Prin urmare în fiecare punct al planului P sosesc două raze a căror oscilații sunt coerente și în fază. Dacă I_0

(amplitudinea $A_0 = \sqrt{I_0}$) reprezintă intensitatea fascicului inițial (pe porțiunea SI), atunci intensitatea fiecărui fascicul, din cele două obținute în urma divizării fasciculului inițial de către lama G, va fi egală cu: $I_0 rt = \frac{I_0}{4}$ (sau amplitudinea $A = \frac{A_0}{4} = \frac{\sqrt{I_0}}{2}$).

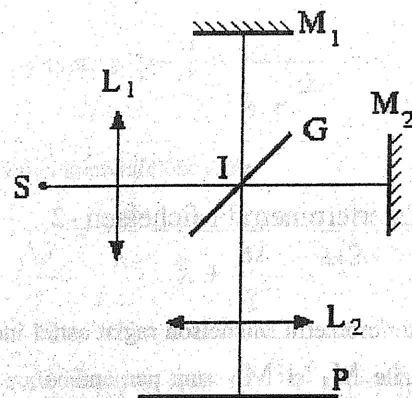


Fig. 61

Deoarece în toate punctele spațiului IP oscilațiile celor două fascicule sunt coerente și în fază, valoarea amplitudinii rezultante va fi: $\frac{A_0}{2} + \frac{A_0}{2} = A_0$ sau a intensității: $I = \left(\frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2}\right)^2 = I_0$. Deci total se petrece ca și cum interferometrul nu ar exista. Deoarece lentila L_2 formează imaginea oglinzii M_1 în planul P (și în același timp și cea a lui M_2), ecranul va fi iluminat uniform, intensitatea incidentă totală fiind I_0. Prin urmare oglinzile și lama separatoare nu fac altceva decât să modifice direcția fascicului ce pleacă din S.

2. - In fața oglinzii M_1 se așează o mică lamă de formă pătrată cu latura egală cu $2\,\mathrm{mm}$, în așa fel încât aceasta produce numai un defazaj uniform independent de λ. Să se arate că, prin măsurători fotometrice, se poate determina defazajul introdus de lamă. Contrastele măsurate pentru două lame La_1 și La_2 fiind $\gamma = 1$, respectiv

$\gamma = 0{,}25$, să se deducă grosimea lamei în lungimi de undă (se va considera prin definiție $\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max}}$).

R: Toate razele paralele care traversează lama La suferă o întârziere corespunzătoare la: $\Delta = 2(n-1)h$, unde n este indicele de refracție al lamei, iar h grosimea acesteia (fig. 62). Defazajul acestor raze în raport cu cele reflectate direct pe M_2 este egal cu $\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$. Razele ce trec prin lama La ajung în P într-o regiune ce reprezintă imaginea lamei La formată de O_2 și determină o iluminare uniformă a acestei regiuni corespunzătoare unei intensități I. In fiecare punct al domeniului $a'b'$ se compun două vibrații de amplitudine $\frac{\sqrt{I_0}}{2}$ și defazate cu φ. Intensitatea rezultantă va fi:

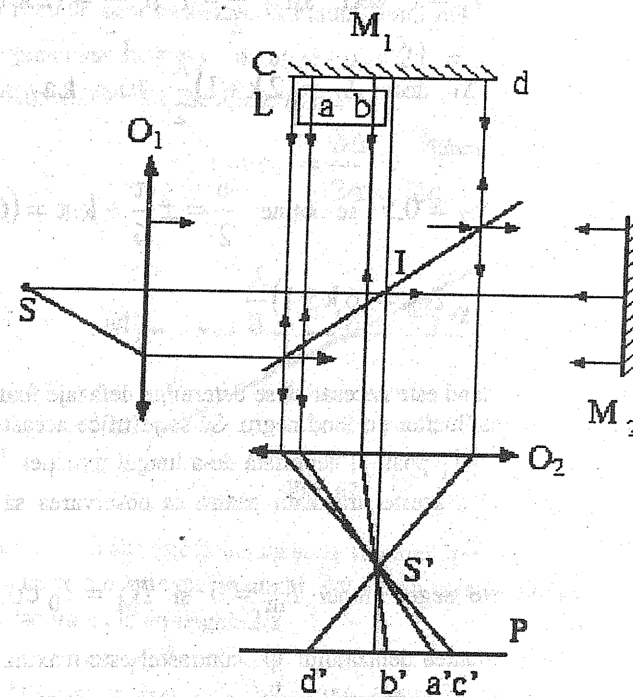


Fig. 62

$$I = A^2 = 2\left(\frac{\sqrt{I_0}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{I_0}}{2}\right)^2 \cos\varphi = I_0 \cos^2\varphi .$$

In domeniul unde nu este interpusă lama La, $\varphi = 0$ deci $I = I_0$. Comparând fluxurile energetice pe două suprafețe egale din domeniul $a'b'$ și $c'd'$ se poate măsura mărimea: $\frac{I}{I_0} = \cos^2\frac{\varphi}{2}$, de unde se poate determina valoarea defazajului φ. Contrastul dintre cele două domenii este egal cu:

$$\gamma = \frac{I_0 - I_0\cos^2\frac{\varphi}{2}}{I_0} = \sin^2\frac{\varphi}{2},$$

și variază între limitele 0 și 1.

Pentru lama La_1: $\gamma_1 = 1$, deci: $\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1$ și $\frac{\varphi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, de unde: $\varphi = (2k+1)\pi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta_1$, deci: $\Delta_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ (lama La_1 reprezintă o *"lamă jumătate de lungime de undă"*

Pentru lama La_2: $\gamma_2 = 0{,}5$, se obține: $\frac{\varphi}{2} = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi = (6k\pm1)\frac{\pi}{6}$,

de unde: $$\Delta_2 = (6k\pm1)\frac{\lambda}{6}.$$

3. - In unele cazuri, când este necesar să se determine defazaje foarte slabe, se preferă ca obiectul să apară strălucitor pe fond negru. Să se justifice această necesitate calculând contrastul. Oglinda M_1 poate fi deplasată de-a lungul direcției IM_1. Să se calculeze valoarea minimă x a acestei translații pentru ca observarea să se facă pe "fond negru"?

R: Dacă fondul este negru atunci $I_m = 0$ și $I_M = I_0\cos^2\frac{\varphi}{2}$, deci $\gamma = 1$, adică oricare ar fi valoarea defazajului φ, contrastul este maxim. Chiar dacă mărimea φ este foarte mică, contrastul va fi egal tot cu $\gamma = 1$ în loc de: $\gamma = \sin^2\frac{2}{2\,4}$, ceea ce ar avea loc dacă $I_m \rangle 0$. Pentru a obține un fond întunecat

este suficient ca oglinda M_1 (sau M_2) să fie deplasată printr-o translație (apropiere sau îndepărtare). Deci $x = \pm\frac{\lambda}{4} = \pm0{,}125$, ceea ce introduce o diferență de drum egală cu $\Delta = 2x = \pm\frac{\lambda}{2}$.

4. - a) Se rotește oglinda M_1 cu un unghi α față de poziția inițială. Să se descrie sistemul de franje obținut (lama La este îndepărtată). Să se stabilească unde se află planul de localizare al franjelor dacă sursa nu este punctiformă. Să se calculeze interfranja i pentru $\alpha = 2'$.

R: In acest caz între oglinda M_1 și imginea M_1' a oglinzii M_2 se formează o pană de aer de unghi α. In planul P unde lentila L_2 formează imaginea lui M_2 se observă franje rectilinii paralele cu axa O de rotație (fig. 63). Dacă sursa nu este punctiformă franjele sunt localizate în planul penei de aer. La distanța y față de axa O pana are grosimea $h = \alpha y$, de unde: $\Delta = 2h = 2\alpha y$. De la o franjă la alta se trece atunci când $\delta\Delta = \lambda\,\delta$, deci interfranja:

$$i = \Delta y = \frac{\delta\Delta}{2\alpha} = \frac{\lambda}{2\alpha}.$$

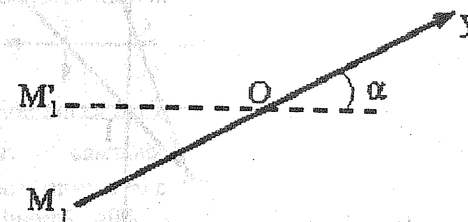


Fig. 63

Relația de mai sus este generală și dă valoarea interfranjei în cazul interferenței a două unde plane ce fac între ele un unghi 2α. Deci sursele de emisie se află la infinit și deasemenea fac între ele un unghi 2α.

$$i = \frac{5\cdot10^{-4}}{2\pi/180\cdot60} = 0{,}43\,\text{mm} \quad (\alpha = 2' = \frac{2\pi}{180\cdot60}).$$

b) Se presupune că în planul P se observă 13 franje luminoase. Ce lărgime unghiulară trebuie să prezinte sursa pentru ca vizibilitatea franjelor în planul P să nu fie perturbată.

R: Deoarece sursa prezintă o extindere spațială, într-un punct oarecare N al penei de aer unde grosimea este egală cu αy sosesc din diferite puncte ale sursei raze cu diferite înclinări. Raza care sosește în N cu o înclinare i provine dintr-un punct S', care este văzut din centrul lentilei L_1 sub același unghi i. Pentru această rază diferența de drum introdusă de pana de aer este egală cu:

$$\Delta = 2\,\mathrm{h}\cos i = 2\alpha y \cos i.$$

Deoarece toate razele care pleacă din N vor ajunge în N', punctul-imaginea lui N dată de lentila L_2; în acest punct va avea loc suprapunerea rezultatelor tuturor fenomenelor de interferență produse separat de toate punctele luminoase ale sursei. Fiecare punct al sursei dă un fenomen de interferență particular, iar lumina emisă de acest punct este incoerentă în raport cu lumina emisă de alte puncte ale sursei (fig. 64).

Să considerăm un punct N, unde S dă o franjă luminosă. Punctul S' al sursei va da, în același punct N, o franjă întunecată dacă:

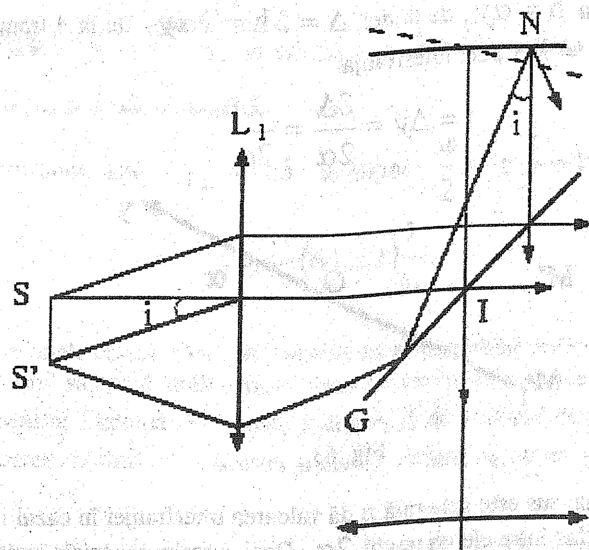


Fig. 64

$$\delta\Delta = (2\mathrm{k}+1)\frac{\lambda}{2} = 2\alpha y(1-\cos i).$$

Unghiul i cel mai mic ce va da acestă discordanță va corespunde la:

$$2\alpha y(1-\cos i) = \frac{\lambda}{2}, \text{ deci: } \cos i = 1 - \frac{\lambda}{4\alpha y}.$$

Deoarece discordanța apare la marginea câmpului, adică pentru: $y = \frac{6\lambda}{2\alpha}$, se obține:

$$\cos i = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}, \text{ deci: } i = 23^\circ 30'$$

(cele 13 franje luminoase sunt situate: 6 de-o parte și 6 de cealaltă parte a punctului de intersecție a imaginilor oglinzilor, iar o franjă la intersecția acestora).

Dacă se admite că franjele sunt încă vizibile când două puncte luminoase situate la marginile sursei dau un decalaj de un sfert de interfranjă, atunci:

$$2\alpha y(1-\cos i) = \frac{\lambda}{4}, \text{ iar: } y = \frac{6\lambda}{2\alpha}, \text{ deci:}$$

$$\cos i = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24},\ i = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

c) Să se descrie aspectul câmpului P dacă lama La se așează la loc.

R: Deoarece valoarea interfranjei este egală cu $\mathrm{i} = 0{,}45\,\mathrm{mm}$, în domeniul ocupat de lama de formă pătrată cu latura de $2\,\mathrm{mm}$ se formează 4 franje. La introducerea lamei cele 4 franje din acest domeniu se deplasează în bloc față de celelalte franje care rămân pe loc. Pentru acest domeniu diferența de drum este egală cu:

$$\Delta = 2\alpha y + 2(\mathrm{n}-1)\mathrm{h}.$$

5. - Considerăm că oglinda M_1 a fost supusă unei rotații de unghi α și unei translații de valoare x calculată la punctul 3. Să se descrie aspectul câmpului dacă există lama și dacă sursa emite lumină albă. Se vizează planul P cu un ocular micrometric. In lumină albă, la introducerea lamei deplasarea franjei centrale corespunde la 23 de diviziuni de pe tambur; în lumină monocromatică ($\lambda = 500\,\mathrm{nm}$) valoarea interfranjei este egală cu 10 diviziuni. Să se deducă diferența de drum optic introdusă de lamă. De ce trebuie măsurată "deplasarea" în lumină albă?

R: Dacă nu ar exista lama La atunci câmpul de interferență ar avea următorul aspect. In lumină albă, o franjă aproape neagră centrală în punctul O deoarece oglinda M_1 a fost translată cu $x = \frac{\lambda}{4}$ $(\lambda = 500\,\mathrm{nm})$. Alături de această franjă apar franje paralele: prima este irizată în violet spre franja neagră și în roșu spre exterior. Următoarele sunt mai puternic irizate ajungând la *albul de ordin superior*. Este necesar să se lucreze în lumină albă pentru a recunoaște franja centrală.

Atunci când se introduce lama La, franja centrală împreună cu sistemul de franje se deplasează în O' (fig. 65). In acest mod se poate determina deplasarea franjei centrale. Această deplasare corespunde la 23 diviziuni pe tambur, deci $2{,}3\,i$ $(\lambda = 500\,\text{nm})$.

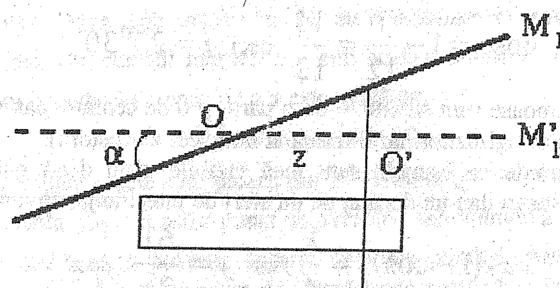


Fig. 65

De unde diferența de drum introdusă de lamă:

$$\Delta = 2{,}3\lambda = 2{,}3 \cdot 0{,}5\mu\,\text{m} = 1{,}15\mu\,\text{m}.$$

Oglinda M_1 a fost rotită cu un unghi α formându-se o pană de aer, iar în urma translării pe distanța x, franja centrală a devenit neagră. La introducerea lamei de sticlă sistemul de franje se deplasează, iar franja centrală neagră o vom regăsi în O', la distanța z. In punctul O' este îndeplinită condiția: $2\alpha z = 2(n-1)h = \Delta$, adică rotația oglinzii micșorează diferența de drum cu $2\alpha z$, iar introducerea lamei o crește cu aceeași mărime; în punctul O' cele două efecte se compensează.

Interferometrul Michelson - 3

Un interferometru Michelson este iluminat de o sursă luminoasă monocromatică plasată în S și se observă fenomenul de interferență în planul focal F al lentilei L plasată la ieșirea din interferometru. Oglinzile M_1 și M_2 sunt reglate în așa fel încât imaginea M_2' a lui M_2 dată de lama separatoare I este exact paralelă cu M_1.

1. - Să se descrie tabloul de interferență ce se observă în planul focal principal F.

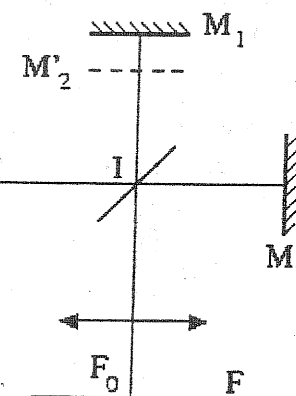


Fig. 66

R: In planul F, datorită prezenței lentilei L, se observă interferența la infinit a celor două fascicule reflectate pe suprafețele paralele M_1 și M'_2 care delimitează între ele o lamă de aer (fig. 66). Tabloul de interferență este format din cercuri concentrice cu centrul în punctul F_0.

2. - Ce condiție trebiue să se impună distanței de la S la I și extinderii spațiale a sursei pentru ca să se observe fenomenul de interferență.

R: Pentru a obține aceste inele de interferență este necesar ca pe lama groasă de aer să vină raze de lumină cu unghiuri de incidență diferite. Dacă se utilizează o sursă punctiformă situată la infinit (distanța SI) sau o sursă punctiformă situată în focarul unei lentile, nu se vor obține inele de interferență deoarece toate razele paralele converg în punctul F_0. Deci este necesar să se utilizeze o sursă punctiformă situată la o distanță finită sau, mai bine, o sursa extinsă spațial situată fie la o distanță finită, fie în focarul unei lentile.

3. - Se așează între I și M_1 un polarizor P_1 care transmite vibrațiile verticale, iar între I și M_2 un polarizor P_2 care transmite vibrațiile orizontale. Ce modificări apar în figura de interferență?

R: Cele două vibrații verticale și orizontale ce ajung în planul F nu pot interfera deoarece ele sunt incoerente (la fel ca în cazul experienței lui Fresnel și Arago).

4. - Păstrând filtrele de polarizare P_1 și P_2, ce trebuie să se mai adauge la montaj pentru a obține în planul F un fenomen identic cu cel ce se obține în lipsa filtrelor de polarizare?

R: Pentru a obține un fenomen identic este necesar să se introducă între S și I un polarizor P a cărui axă optică să nu coincidă cu axele optice ale polarizorilor P_1 și P_2 (aceasta va transmite lumină a cărei oscilații se va face într-un singur plan, deci va restabili coerența). De asemenea între I și L este necesar să se introducă un analizor A (a cărui axă optică să nu coincidă cu axa polarizorilor P_1 și P_2) care face posibilă obținerea a două oscilații paralele. Pentru ca figura de interferență să prezinte maximul de contrast este necesar ca axele optice ale lui P și A să facă un unghi de 45^o cu axele optice ale lui P_1 și P_2 (amplitudinile celor două oscilații care interferă vor fi egale și $I_{min} = A_1 - A_2 = 0$).

5. - Să se analizeze cum variază în absența polaroizilor intensitatea luminoasă în planul focal F_0 al lentilei L funcție de distanța h dintre P_1 și P_2, (se presupune că reflexiile precum și traversarea lamei separatoare I nu introduce întârziere optică).

R: In punctul F_0, situat pe axa optică a dispozitivului, ajung razele ce sunt reflectate normal de M_1 și M_2. Dacă h reprezintă grosimea lamei de aer echivalentă sistemului format din cele două oglinzi și din lama separatoare, atunci: $\Delta = 2h$, de unde: $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2h$, iar variația intensității: $I = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$.

6. - Se introduce între S și I un polarizor P, o lamă anizotropă Q_1 între I și M_1 și o lamă anizotropă Q_2 între I și M_2. Lamele Q_1 și Q_2 sunt identice și fiecare introduce o întârziere optică de $\frac{\lambda}{8}$ între cele două vibrații rectilini, perpendiculare, care se propagă fără deformație. Axele optice ale acestor lame fac un unghi de 45^o cu direcția vibrației transmise de polarizorul P; pe de altă parte axele optice între ele sunt perpendiculare, adică axa lamei Q_1, care corespunde valorii cele mai mari a indecelui de refracție este paralelă cu axa pentru care indicele de refracție al imaginii Q'_2 a lamei Q_2 față de lama separatoare I are valoarea cea mai mică. Să se analizeze cum variază intensitatea și starea de polarizare a luminii în F_0 atunci când h variază. Se va analiza în particular starea de polarizare pentru $h = 0$.

R: După filtrul de polarizare P câmpul de radiație este liniar polarizat; acesta este incident atât pe lama anizotropă Q_1 cât și pe lama Q_2. Axa optică a lamei Q_1 face un unghi de 45^o cu axa optică a lui P, deci la trecerea prin Q_1 radiația se descompune în două oscilații reciproc perpendiculare, de amplitudine egală și diferență de fază egală cu $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}$. Când lama este traversată a doua oară de radiația reflectată pe oglindă se mai introduce o diferență de fază de $\frac{\pi}{4}$, în total obținându-se $\frac{\pi}{2}$, deci radiație polarizată circular. Lama Q_2 de asemenea formează lumină polarizată circular, însă datorită așezării asimetrice a axei optice față de Q_1, circulația este în sens invers.

Lama de aer introduce între cele două oscilații polarizate circular în sens invers o diferență de drum de $\Delta = 2h$, căreia îi corespunde o diferență de fază egală cu $\varphi = \frac{4\pi h}{\lambda}$, de unde variația intensității în punctul F_0, atunci când variază grosimea lamei de aer este dată de:

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = I_0 \cos^2 \frac{4\pi h}{2\lambda}.$$

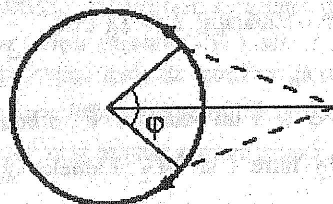


Fig. 67

Dacă $\Delta = 0$ se obține $I = I_0$, adică se obține oscilația inițială dată de polarizorul P (ca și cum lamele anizotrope nu ar interveni) (fig. 67).

7. - Cu ce mediu optic poate fi comparat ansamblul format de interferometrul Michelson și cele două lame Q_1 și Q_2? Să se precizeze cantitativ, funcție de grosimea lamei de aer h.

R: Ansamblul format de interferometru și lamele anizotrope Q_1 și Q_2 poate fi comparat cu un cristal de cuarț de lungime d, tăiat perpendicular pe axa optică și așezat în așa fel încât axa lui optică este paralelă cu direcția SI. In acest caz planul de polarizare al radiației polarizate liniar dată de polarizorul P va fi rotit de către cristalul de cuarț cu un unghi α (fenomenul de rotire naturală a planului de polarizare):

$$\alpha = \frac{2\pi h}{\lambda} = \pi(n_s - n_d)d,$$

de unde:

$$d = \frac{n_s - n_d}{\lambda} h.$$

8. - Să se indice ce se întâmplă dacă (menținând mărimea h fixă) se așează între lama separatoare și cele două oglinzi, două lame identice prezentând:

a) rotirea naturală a planului de polarizare;

b) rotirea magnetică a planului de polarizare

R: a) Dacă lama prezintă proprietatea de rotire naturală a planului de polarizare, la trecerea a doua oară prin lamă a luminii reflectate are loc compensarea primei rotiri. Ca rezultat nu se observă nici o schimbare în tabloul de interferență.

b) Rotirea magnetică depinde de sensul curentului în bobina de excitare și nu de sensul de propagare a radiației. La a doua trecere unghiurile de rotire se adună ceea ce conduce la un unghi de rotire egal cu 2α.

Interferometrul Rayleigh

Schema unui interferometru Rayleigh destinat măsurării indicelor de refracție la gaze este prezentat în fig. 68. Un colimator C este urmat de două cuve identice; obiectivul lunetei L reglată pentru infinit are un capac în care sunt perforate două fante F_1 și F_2, paralele cu fanta de intrare F a colimatorului. Distanța dintre centrele celor două fante, care sunt dispuse pe axele cuvelor, este egală cu 3 cm. Dispozitivul este iluminat cu radiația monocromatică a mercurului $\lambda = 546\,\text{nm}$.

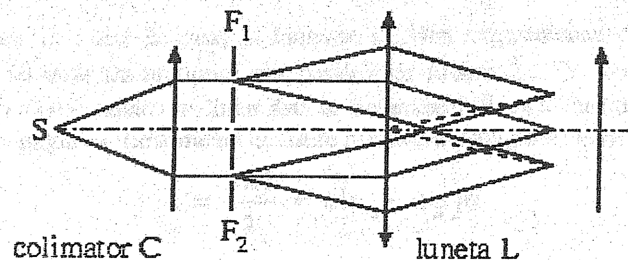


Fig. 68

1.- Să se explice cauza apariției tabloului de interferență. Care este distanța dintre două franje succesive? Care trebuie să fie grosismentul lunetei pentru ca să se observe două franje vecine, știind că ochiul poate observa două obiecte dacă acestea sunt separate de o distanță unghiulară de $0{,}1^\circ$?

R: a) Fasciculul paralel de radiație este difractat de fantele F_1 și F_2. Razele paralele între ele ce aparțin la cele două fascicule difractate interferă la infinit, deci franjele de interferență pot fi observate cu ajutorul lunetei reglate la infinit.

b) *Calculul interfranjei* (fig. 69). Diferența de drum între razele ce interferă: $\Delta = a\sin\theta \cong a\,\theta$. In planul focal al lentilei se poate scrie:

$$x = F\theta = F\frac{\Delta}{a}.$$

Distanța unghiulară între cele două franje este: $\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$, iar mărimea interfranjei în planul focal este: $i = \frac{F}{a}\lambda$.

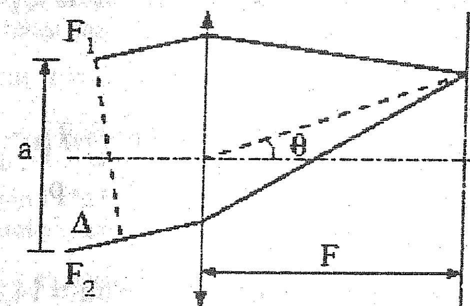


Fig. 69

c) *Calculul grosismentului*: $G\,\Delta\theta = G\frac{\lambda}{a} \geq 0{,}1^\circ = \frac{\pi}{180 \cdot 10}$,

deci:

$$G \geq \frac{a}{\lambda}\frac{\pi}{1800}.$$

2. - Cuvele pentru gaze au o lungime $l = 1\,\text{m}$; ele sunt închise la ambele capete cu lame de sticlă de aceeși grosime, însă care poate fi neglijată. La început acestea conțin aer la presiune normală. Apoi presiunea dintr-un tub se micșorează și se constată că prin fața reticulului trec 10 franje. Să se calculeze variația presiunii. Care este variația admisibilă a temperaturii într-un tub în raport cu celălalt dacă observarea frajelor se face cu o precizie de $1/10$ dintr-o franjă?

Se consideră că indicele de refracție al aerului este egal cu 1,000292 la presiune normală, aerul se supune legii $\frac{n-1}{d} = ct$ și este considerat un gaz perfect.

Indicele de refracție al CO_2 la presiune normală este $1,000448$; care este numărul de franje care se deplasează în fața reticulului când se înlocuiește aerul dintr-un tub cu aer viciat ce conține $1\% CO_2$ la aceeași presiune și aceeași temperatură? Se admite că în amestecul gazos *"puterea de refracție"* $(n-1)$ se adună conform relației de aditivitate.

R: a) Dacă în fața fantelor F_1 și F_2 se introduc cele două cuve, atunci drumul optic în interiorul lor este nl, depășind drumul optic corespunzător când acestea sunt vidate cu $(n-1)l$. In centrul câmpului, în locul $x=0$ este îndeplinită condiția $\Delta = 0$. La micșorarea presiunii într-o cuvă, variația drumului optic este egală cu:

$$\delta\Delta = 10\lambda = l\Delta n .$$

Legea gazelor perfecte pentru un gram de gaz: $pV = RT$, iar din legea lui Gladstone $\frac{n-1}{d} = ct$ se obține:

$$\frac{n-1}{\frac{1}{V}} = (n-1)V = (n-1)\frac{RT}{p}, \text{ sau: } \frac{dn}{n-1} = \frac{dp}{p}, \text{ de unde:}$$

$$\Delta p = \frac{p}{n-1}\Delta n = \frac{p}{n-1}\frac{10\lambda}{l} = 1{,}87\cdot 10^{-2}\ \text{atm} = 14{,}212\ \text{torr} .$$

b) Dacă temperatura variază și presiunea este constantă atunci din relația $(n-1)T = ct$, se obține:

$$\frac{dn}{n-1} + \frac{dT}{T} = 0 \text{ sau: } -l\Delta n = l(n-1)\frac{\Delta T}{T} = \frac{\lambda}{10},$$

deci: $$\Delta T = T\frac{1}{10(n-1)}\frac{\lambda}{l}, \text{ de unde: } \Delta T = 1{,}87\cdot 10^{-4}\ T .$$

Dacă: $T = 300\,K$, atunci: $\Delta T = 5{,}61\cdot 10^{-2}\ K$.

c) In cazul amestecurilor de gaze se poate scrie:

$$(n-1)_{amestec} = 0{,}99(n-1)_{aer} + 0{,}01(n-1)_{CO_2} =$$
$$= (n-1)_{aer} + 0{,}01(n-1)_{CO_2} - 0{,}01(n-1)_{aer} =$$

$$(n-1) = (n-1)_{amestec} - (n-1)_{aer} = \frac{1}{100}(n-1)_{CO_2} =$$
$$= (n-1)_{aer} = \frac{n_{CO_2} - n_{aer}}{100} = 1{,}56\cdot 10^{-6}$$

Deci: $\delta\Delta = [\delta(n-1)]l = 1{,}56\cdot 10^{-6}\cdot 10^{6}\,\mu m = 1{,}56\,\mu m$.

Numărul de franje ce se deplasează este egal cu:

$m = \frac{\delta\Delta}{\lambda} = \frac{1{,}56}{0{,}546} = 2{,}857$ (deci se poate determina conținutul de $1\% CO_2$ din aerul viciat).

3. - Măsurători de genul descris mai sus se fac în lumină albă, plasând în drumul celor două fascicule două lame de sticlă ale unui compensator Jamin. Când cele două tuburi conțin același gaz cele două fascicule traversează cele două lame sub același unghi de incidență de $i = 6^o$; lamele au aceeași grosime h și același indice de refracție $n = \frac{3}{2}$, a cărui valoare este considerată constantă. Ce diferență de drum optic introduce compensatorul când el se rotește cu un unghi mic? In experiența în care se variază presiunea aerului, pentru a readuce sistemul de franje la poziția inițială, este necesar să se rotească compensatorul cu un unghi de 6^o. Care este grosimea h a lamelor?

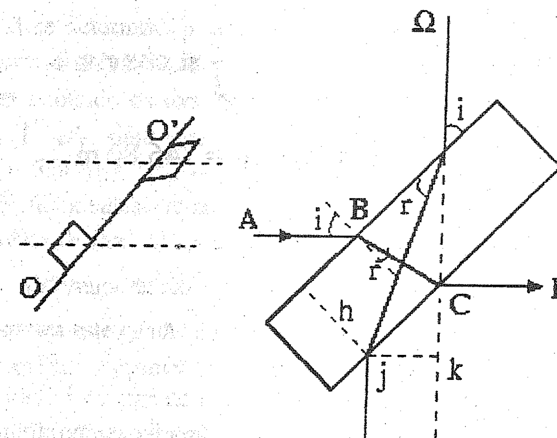


Fig. 70

R: Un compensator Jamin este compus din două lame de sticlă de aceeași grosime ce sunt așezate corespunzător în drumul celor două fascicule. Lamele sunt

aşezate înclinat față de fascicul, având posibilitatea de a se roti în jurul axei OO', unghiul de rotire putând fi măsurat (fig. 70).

a) Să calculăm întârzierea introdusă de lamă la traversare ei de către fasciculul de lumină incident sub unghiul i. Direcția fasciculului ce traversează lama este $ABCD$. Frontul de undă la trecerea prin lamă este reprezentat de planul Ω (perpendicular pe direcția de propagare a fasciculului de lumină).

Deci diferența de drum optic este:

$$\Delta = JK = IJ\sin(i-r) = h\frac{\sin(i-r)}{\cos r} = h(\cos r - \cos i).$$

b) Deoarece ambele lame se rotesc simultan, atunci când pentru un fascicul unghiul i crește cu di, pentru celălalt scade cu aceeași cantitate di. Variația de drum optic între cele două fascicule va fi:

$$\delta\Delta = 2h(-n\sin r\, dr + \sin i\, di) = 2h\frac{\sin(i-r)}{\cos r}di,$$

deoarece din relația: $\sin i = n \sin r$ se obține:

$$\cos i\, di = n \cos r\, dr.$$

c) Variind unghiul de incidență cu $\Delta i = 6^{o}$ se poate compensa o variație a drumului optic $\delta\Delta = 10\lambda$. Dacă variația $\Delta i = 6^{o} = \frac{\pi}{30}$ este considerată drept o valoare mică, atunci:

$$\sin(i-r) \cong i - r = i\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{i}{3} \text{ și } \cos r \cong 1.$$

Deci: $\Delta = 10\lambda = 2h\frac{\pi}{3\cdot 30}\frac{\pi}{30}$, de unde: $h = 746{,}8\mu m$.

Interferența fasciculelor difractate.

Intr-un ecran transparent sunt perforate două fante A și B de aceeși lărgime și paralele între ele. Fantele au aceeași înălțime, însă se presupune că înălțimea nu intervine în calcule. Ecranul este iluminat de o undă plană, monocromatică λ, ce provine de la sursa S, iar frontul de undă este paralel cu planul. Considerăm lărgimea fantei neglijabilă față de lungimea de undă (λ) și cu atât mai mult, față de distanța dintre fante.

1. - Să se determine poziția franjelor de interferență în planul focal al unei lentile L, a cărei distanță focală este F. Notăm cu C mijlocul distanței AB. Axa optică a lentilei coincide cu axa SCO. Se notează $AB = 2a$ și se presupune că distanța focală F este mult mai mare decât distanța a. Considerăm: $2a = 4\,cm$, $F = 2\,m$, $\lambda = 500\,nm$. Care este cel mai bun procedeu pentru a observa franjele de interferență?. Să se calculeze repartiția intensității luminoase în planul focal al lentilei, funcție de diferența de fază φ ce există între undele ce provin de la fantele A și B. Să se determine diferența de fază φ_1 corespunzătoare punctului cel mai apropiat de O, unde intensitatea este egală cu intensitatea în maxim diminuată cu 4% (fig. 71).

R: Deoarece lărgimea fantelor A și B este foarte mică, deschiderea unghiulară a primului maxim de difracție este foarte mare. Ca urmare, în vecinătatea punctului O, amplitudinea vibrației difractate de către fiecare fantă variază foarte puțin față de amplitudinea inițială A_0. Diferența de drum optic între cele două raze paralele din cele două fascicule difractate este: $\Delta = 2a\sin\varepsilon \cong 2a\varepsilon$, iar maximele de intensitate corespund la:

$$\Delta = k\lambda, \text{ de unde: } \varepsilon = \frac{k\lambda}{2a}.$$

In planul focal al lentilei: $x = F\varepsilon = k\frac{\lambda F}{2a}$, deci interfranja:

$$i = \frac{\lambda F}{2a} = 0{,}5\frac{200}{4} = 25\mu m.$$

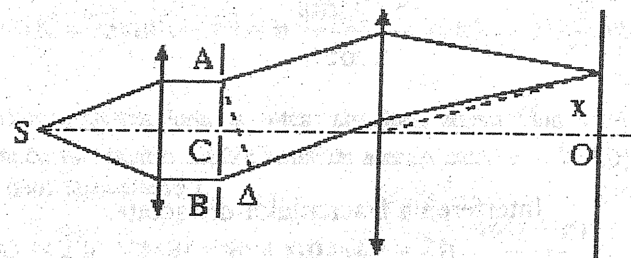


Fig. 71

Deoarece distanţa $2a$ dintre fante este mare, franjele de interferenţă sunt foarte fine: 40 franje pe mm. Franja centrală este luminoasă. Pentru observarea franjelor trebuie să se utilizeze o lupă Fresnel sau micrometrul ocular al unei lunete a cărei obiectiv este prima lentilă.

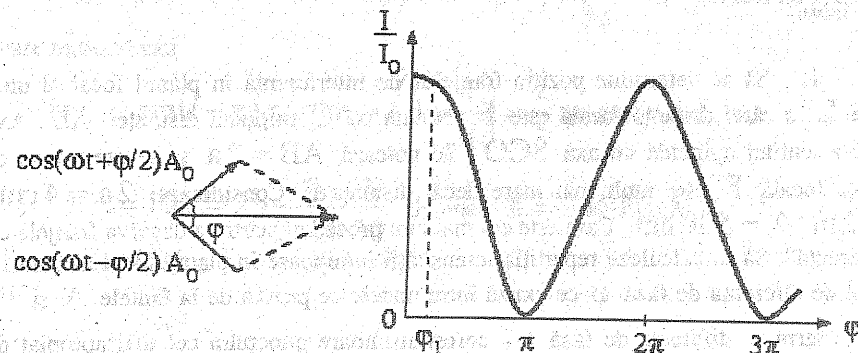


Fig. 72 a,b

Să considerăm A_0 amplitudinea vibraţiei difractate de fiecare fantă în vecinătatea difracţiei normale. Compunerea celor două vibraţii de amplitudine egală

(A_0), a căror defazaj este egal cu φ, ne dă o vibraţie de intensitate: $I = 4A_0^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$, deoarece: $I_0 = A_0^2$, se obţine:

$$\frac{I}{I_0} = 4\cos^2\frac{\varphi}{2} = 4\cos^2\frac{2\pi\Delta}{2} = 4\cos^2\frac{\pi}{\lambda}\frac{2\pi a x}{F} = 4\cos^2\frac{\pi x}{i}.$$

Repartiţia intensităţii luminoase este prezentată în fig. 72 b.

Dacă intensitatea corespunzătoare defazajului $\varphi = 0$ se consideră $I = I_0' = 4I_0$ (I_0' - intensitatea franjei din punctul O), atunci se poate scrie:

$\cos^2\frac{\varphi_1}{2} = 0{,}96$, sau: $\sin^2\frac{\varphi_1}{2} = 0{,}04$, $\sin\frac{\varphi_1}{2} = 0{,}2$ de unde: $\frac{\varphi_1}{2} \cong 0{,}2$,

deci: $\varphi_1 = 0{,}4\,\text{rad} = \frac{180\cdot 0{,}4}{3{,}14} = 23^o$, sau: $\frac{\varphi_1}{2} \cong 0{,}2 = \frac{\pi x_1}{i}$, de unde:

$x_1 = \frac{0{,}2i}{\pi} = 1{,}6\mu m$, reprezintă distanţa faţă de punctul O unde intensitatea franjei este egală cu: $I = 0{,}96I_0'$.

2. - Fără a schimba nimic din dispozitivul precedent, se introduce o a treia fantă. Acesta este paralelă cu fantele A şi B şi trece prin punctul C. Lărgimea acestei fante este aleasă astfel încât în vecinătatea punctului O, amplitudinea radiaţiei ce provine din C este de ρ ori amplitudinea radiaţiei ce provine de la fantele A şi B; lărgimea acestei fante este de asemenea mică în raport cu lungimea de undă λ sau cu mărimea a. Fanta C are aceeaşi lungime ca şi fantele A şi B şi se presupune că această lungime nu intervine explicit în calcule. Să se analizeze fenomenele de interferenţă produse de cele trei fante în vecinătatea punctului O. Care sunt poziţiile maximelor şi minimelor de intensitate. Ce valoare trebuie să aibă ρ, pentru a obţine franje cu intensitate egală cu zero.

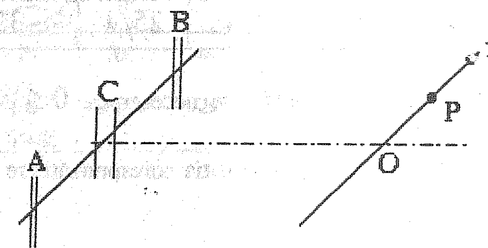


Fig. 73

R: Dacă amplitudinile ce provin de la fantele A şi B sunt egale cu A_0, atunci amplitudinea ce provine de la fanta C este egală cu ρA_0. Considerând că în punctul $P(x)$ $(x=0)$ (fig. 73) unda ce provine de la fanta B are asupra undei ce provine de la fanta A un avans de fază egal cu φ, atunci asupra undei ce provine din C are un avans de fză egal cu $\frac{\varphi}{2}$, iar unda din C are asupra undei din A tot unavans de $\frac{\varphi}{2}$. Considerând drept origine a fazelor, faza undei ce provine din C, atunci diagrama Fresnel capătă aspectul din fig. 74. Amplitudinea vibraţiei rezultante este egală cu: $A_0\left(\rho+2\cos\frac{\varphi}{2}\right)$, iar intensitatea: $I=I_0^2\left(\rho+2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2$.

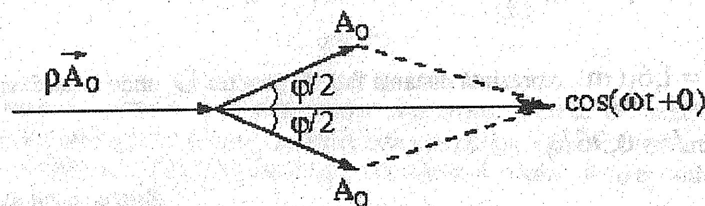


Fig. 74

Pe baza acestei relaţii, pentru diferite valori ale mărimii ρ şi pentru diferite poziţii $P(x)$ (diferite valori φ), se poate urmări variaţia intensităţii în planul focal:

	$\varphi=0$	π	2π	3π	4π
$\rho=0$	4	0	4	0	4 (cazul de la pct. 1)
1	9	1	1	1	9
2	16	4	0	4	16
5/2	33/4	25/4	1/4	25/4	33/4

Ca valoarea intensităţii să fie nulă este necesar ca $0\leq\rho\leq 2\pi$, de unde rezulta: $\cos\frac{\varphi}{2}=-\frac{\rho}{2}$, relaţie ce determină pozitia corespunzătoare $P(x)$ din planul focal. De ex.:

$$\rho=1,\ \cos\frac{\varphi}{2}=-\frac{1}{2},\ \varphi=2\left(\pi\pm\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\rho=2,\qquad \varphi=2\pi$$

Reprezentarea grafică a variaţiei intensiăţii are aspectul din fig. 75. Se observă că figura de interferenţă capătă o altă periodicitate. Odată cu creşterea mărimii ρ (pentru $0\langle\rho\langle 2\pi$) intensitatea franjei corespunzătoare la $\varphi=(k+1)2\pi$ scade, ajungând egală cu zero pentru $\rho=2$. In acelaşi timp, după cum s-a stabilit mai sus, minimile de la π şi 3π se deplasează spre $\varphi=2\pi$ şi ajung să se contopescă cu această poziţie pentru $\rho=2$. Deci, în acest caz, numărul de interfranje se micşorează, interfranja devenind egală cu $i'=2i=50\mu m$. Dacă $\rho\rangle 2$ şi creşte în continuare atunci valoarea intensităţii minime corespunzătoare lui $\varphi=(k+1)2\pi$, nu mai este egală cu zero. Pentru valori mari ale lui ρ (deci pentru deschideri mari ale fantei C) această valoare începe să fie comparabilă cu cea a intensităţii maxime, iar figura de interferenţă dispare.

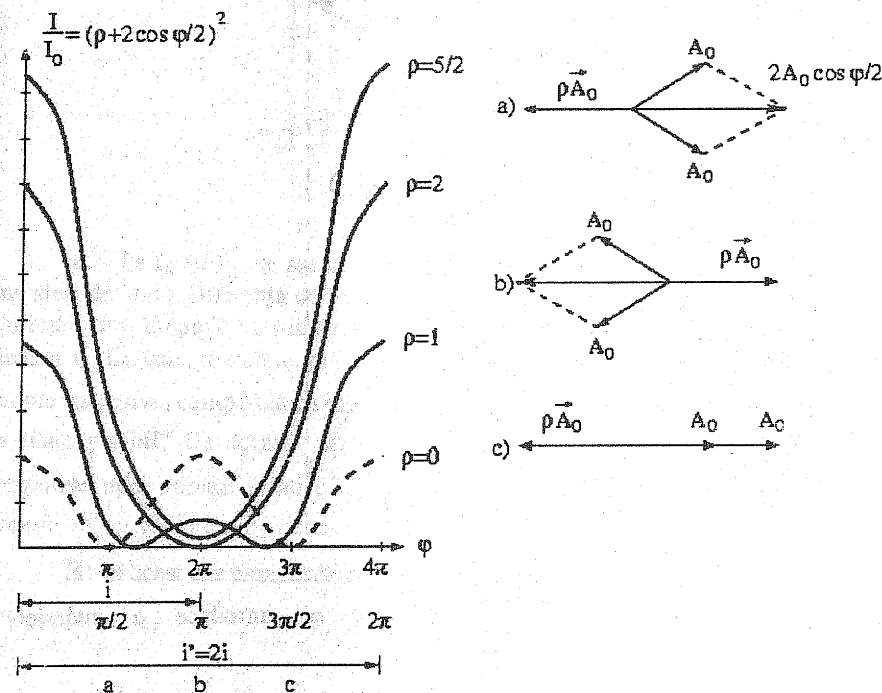


Fig. 75

3. - Fără a modifica fantele A, B şi C, pe fanta C se aşează o lamă sfert de undă, perfect transparentă. Această lamă o acoperă complet, însă nu acoperă fantele A şi B. Lama acţionează numai asupra drumului optic parcurs de raza luminoasă. Ce modificări apar în figura de interferenţă observată în vecinătatea punctului C.

R: Dacă se consideră că elongaţia vibraţiei radiaţiei transmise de fanta C într-un punct $P(x)$ în lipsa lamei sfert de undă este egală cu $\rho A_0 \cos(\omega t + 0)$ atunci elongaţia vibraţiei transmise de B este egală cu $A_0 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$, cea transmisă de A este $A_0 \cos\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right)$, iar cea transmisă de fanta C prin lama sfert de undă

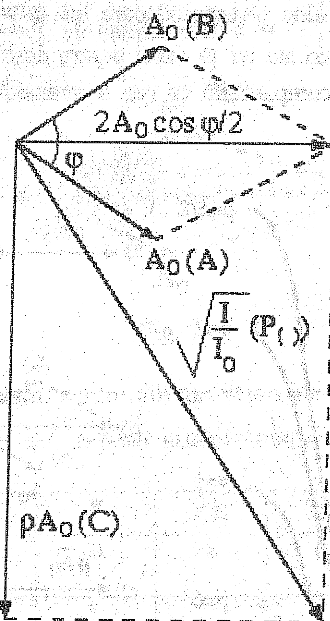


Fig. 76

este egală cu $\rho A_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, deoarece se introduce o întârziere $\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$. Compunerea acestor elongaţii în punctul $P(x)$, conform diagramei lui Fresnel, conduce la rezultatul prezentat în fig. 76:

$$\frac{I}{I_0} = \rho^2 + 4\cos^2\varphi .$$

Acesta este rezultatul de la primul punct al problemei suplimentat cu mărimea ρ^2. Distribuţia intensităţii este asemănătoare cu cea de la primul punct, însă minimele nu mai sunt egale, iar maximele sunt mai luminoase. Franjele nu suferă nici o deplasare, iar mărimea interfranjei este aceeaşi şi anume $i = 25\mu\,m$ (fig. 77).

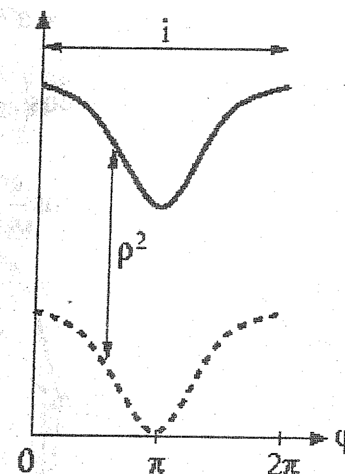


Fig. 77

4. - Pe fanta C se aşează o lamă perfect transparentă, care nu este riguros o lamă sfert de undă. Diferenţa de fază introdusă de această lamă diferă de cea introdusă de o lamă sfert de undă cu cantitatea ε. Să se calculeze variaţia intensităţii funcţie de valoarea ε. Ce valoare trebuie să i se dea lui ρ pentru ca variaţia intensităţii între două maxime succesive, comparată cu intensitatea aceloraşi maxime pentru $\varepsilon = 0$, să fie cât mai mare posibil? Cu această valoare a lui ρ să se calculeze valoarea lui ε_1 ce corespunde unei variaţii relative de intensitate de 4% între două maxime. Să se compare ε_1 cu valoarea φ_1 determinată la punctul 1.

R: In acest caz elongaţiile ce ajung în punctul $P(x)$ vor avea valorile:

(A) $A_0 \cos\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right)$

(B) $A_0 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$

(C) $\rho A_0 \cos\left[\omega t - \left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right)\right]$

Diagrama lui Fresnel are aspectul din fig. 78.

Deci: $$\frac{I}{I_0} = \rho^2 + 4\cos^2\frac{\varphi}{2} + 4\rho\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) \cong$$

$$\cong \rho^2 + 4\cos^2\frac{\varphi}{2} + 4\rho\varepsilon\cos\frac{\varphi}{2}$$

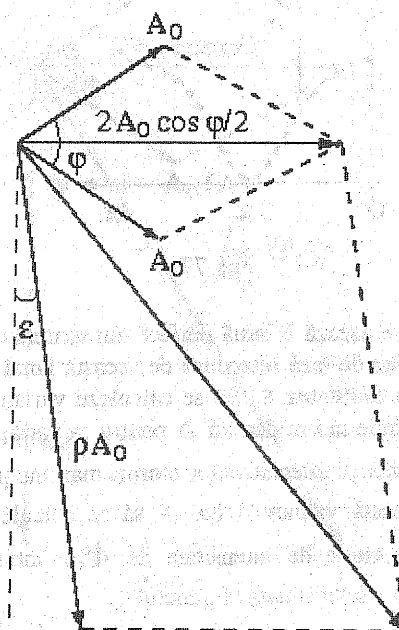


Fig. 78

Dacă: $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, se obține:

$$\varphi = 0,\ I_{MM} = \frac{I}{I_0} = \rho^2 + 4 + 4\rho\varepsilon;$$

$$\varphi = \pi,\ I_m = \rho^2;$$

$$\varphi = 2\pi,\ I_{Mm} = \frac{I}{I_0} = \rho^2 + 4 - 4\rho\varepsilon;$$

Dacă: $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ se permută I_{MM} cu I_{Mm}. Distribuția intensității în planul focal al lentilei are aspectul din fig. 79. Diferența de intensitate între două maxime succesive este egală cu:

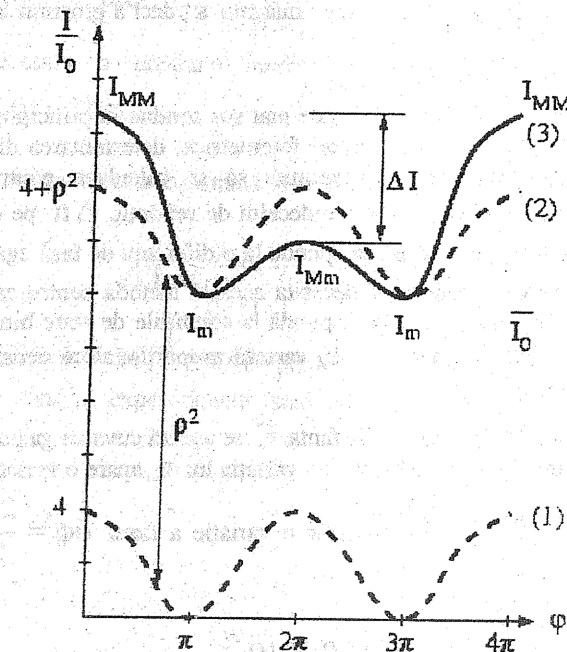


Fig. 79

$$\Delta I = I_{MM} - I_{Mm} = 8\rho\varepsilon.$$

In cazul $\varepsilon = 0$ s-a obținut: $I_M = \rho^2 + 4$.

Funcţia: $y=\frac{I_{MM}-I_{Mm}}{I_M}=\frac{8\varepsilon\rho}{\rho^2+4}=\frac{8\varepsilon}{\rho+\frac{4}{\rho}}$, prezintă o valoare maximă

pentru: $\rho=\frac{4}{\rho}=2$, deci: $y_M=2\varepsilon$.

Atunci când variaţia relativă a intensităţii între două maxime este egală cu 4% se obţine: $y_M=2\varepsilon_1=0{,}04$, deci: $\varepsilon_1=0{,}02$.

In cazul primei probleme pentru aceeaşi variaţie de intensitate s-a determinat diferenţa de fază $\varphi_1\cong 0{,}4=20\varepsilon_1$. Deci variaţia intensităţii în câmpul de interferenţă este mult mai sensibilă la variaţia mărimii ε, deci a grosimii lamei din faţa fantei C.

5. - Valorile obţinute în problema de mai sus conduc în principiu la o metodă nouă care ar permite, pe bază de măsurători fotometrice, determinarea diferenţelor de fază cu o foarte mare precizie. Ca exemplu să se calculeze pentru o radiaţie monocromatică ($\lambda=500\,\text{nm}$), variaţia indecelui de refracţie Δn pe o lungime de $1\,\text{cm}$ a unui tub umplut cu gaz care corespunde la o diferenţa de fază egală cu ε_1. Să se indice ce precauţii experimentale ar necesita această metodă pentru ca o asemenea determinare de indice de refracţie să corespundă la condiţiile de stare bine definite ale unui gaz. Se consideră că mărimea $(n-1)$ variază proporţional cu densitatea gazului ($n=1{,}0003$) (fig. 80).

R: In fasciculul ce provine de la fanta C se aşează cuva cu gaz de lungime l, iar indicele de refracţie al gazului este n. La variaţia lui n apare o variaţie a drumului optic egală cu: $\delta\Delta=l\Delta n$, corespunzător o variaţie a fazei $\delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}l\Delta n$. Din condiţia: $\delta\varphi=\varepsilon_1$, se obţine:

$$\Delta n=\frac{\varepsilon_1}{2\pi}\frac{\lambda}{l}=\frac{0{,}02}{2}\frac{0{,}5\cdot10^{-3}}{10^3}=1{,}59\cdot10^{-9},$$

deci o precizie foarte mare a determinării indicelui de refracţie.

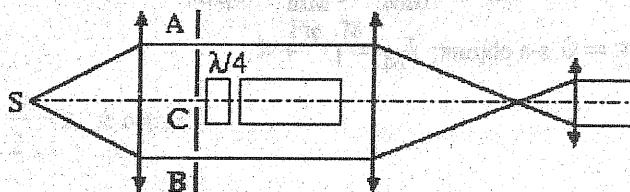


Fig. 80

Din punct de vedere al realizării experimentale apar o serie de dificultăţi: franjele sunt foarte dese ($i=25\,\mu\text{m}$) deoarece mărimea $2a=4\,\text{cm}$ este mare. Această mărime nu poate fi micşorată deoarece trebuie aşezată cuva cu gaz. La o asemenea precizie mediul din cuvă trebuie să fie foarte omogen, adică să prezinte acelaşi indice de refracţie pe toată lungimea cuvei. Asupra omogenităţii gazului din cuvă influenţează atât presiunea cât şi temperatura. Din legea lui Gladstone $\frac{n-1}{d}=ct$, pentru o masă de $1\,\text{g}$ de gaz $\left(\frac{p}{d}=RT\right)$ se obţine: $\frac{n-1}{RT}p=ct$.

Dacă temperatura este constantă, iar presiunea variază, atunci: $\frac{dn}{n-1}+\frac{dp}{p}=0$, de unde: $\Delta p=\frac{p}{n-1}\Delta n\cong\frac{1{,}6\cdot10^{-9}}{3\cdot10^{-4}}p$.

Deci este necesară o presiune uniformă şi constantă până la precizia de: $\Delta p\langle 5\cdot10^{-6}p=5\,\text{bari}$.

Dacă presiunea este constantă şi temperatura variază: $\frac{dn}{n-1}-\frac{dT}{T}=0$, de unde: $\Delta T=\frac{\Delta n}{n-1}T\cong\frac{1{,}6\cdot10^{-9}}{3\cdot10^{-4}}T$.

$\Delta T\langle 5\cdot10^{-6}T=1{,}5\cdot10^{-3}$ grade, pentru: $T=300\,\text{K}$.

Aceste condiţii experimentale sunt greu de realizat, deci metoda este prea sensibilă.

Etalonul Fabry-Perot. Etalonul dublu.

1. - Un etalon Fabry-Perot este format din două placi de sticlă (sau de cuarț), șlefuite optic, *semi*argintate, care limitează între ele o pană de aer de grosime h. Valoarea coeficienților de reflexie, transmisie și absorție a fiecărei din cele două oglinzi care limitează lama de aer, este egală respectiv cu R, T, A. Pe o lamă a acestui sistem este incident sub unghiul de incidență i un fascicul de radiație optică de lungime de undă λ. Să se arate că intensitatea fasciculului transmis de sistem este dată de relația:

$$I = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\varphi}{2}}, \text{ unde: } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2\text{h}\cos i.$$

R: Din fig. 81 rezultă că între razele corespunzătoare mărimilor I_1 și I_2 apare diferența de drum optic:

$$\Delta = \text{n}_a(\text{AB}+\text{BC}) - \text{n}_g\text{AD},$$

unde: n_a - indicele de refracție al mediului dintre plăci (aer, deci $\text{n}_a \cong 1$), n_g - indicele de refracție al materialului din care sunt confecționate plăcile.

Din considerente geometrice:

$$\Delta = \frac{2\text{h}}{\cos i} - 2\text{hn}_g \tan i \sin r = 2\text{h}\left(\frac{1}{\cos i} - \frac{\sin i}{\sin r}\tan i \sin r\right) = 2\text{h}\cos i.$$

Diferența de fază dintre aceleași raze este egală cu:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}2\text{h}\cos i \cong \frac{2\pi}{\lambda}2\text{h}\left(1 - \frac{i^2}{2}\right).$$

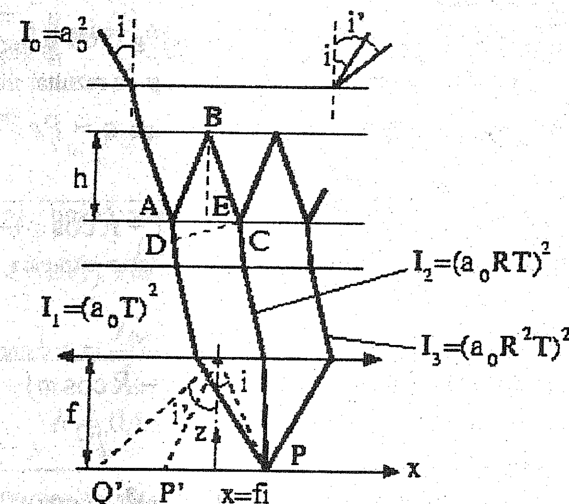


Fig. 81

Dacă I_0 reprezintă intensitatea razei incidente, atunci:

$$I_1 = T^2 I_0,\ I_2 = T^2R^2 I_0,\ I_3 = T^2R^4 I_0,\ I_4 = T^2R^6 I_0,\ \ldots,$$

iar dacă amplitudinea oscilației câmpului corespunzătoare lui I_1 o notăm cu $\text{a}_1 = T\text{a}_0$, amplitudinile razelor rezultate în urma reflexiilor multiple vor fi: a, Ra, R^2a, R^3a, ..., iar diferențele de fază ale acelorași raze introduse de drumurile optice parcurse în plus sunt:

$$0,\ \varphi,\ 2\varphi,\ 3\varphi, \ldots$$

Fasciculul de raze paralele I_1, I_2, I_3,... este focalizat de lentila convergentă L în punctul P ($x = \text{f}\,i$) al planului ei focal. În punctul P′ va converge fasciculul de raze paralele ce provine de la raza incidentă pe interferometru sub același unghi, însă în partea dreaptă a figurii. In punctele Q și Q′ vor converge fascicule ce provin de la razele incidente sub unghiul i'. Figura de interferență obținută în planul focal al lentilei L va fi formată din cercuri concentrice (radiație monocromatică), cu centrul pe axul optic al sistemului (franje localizate la infinit). Elongația undei rezultante în punctul P este:

$$y = a\cos(\omega t - 0) + aR\cos(\omega t - \varphi) +$$
$$+ aR^2\cos(\omega t - 2\varphi) + \cdots + aR^n\cos^n(\omega t - \varphi),$$

sau folosind numere complexe:

$$y = \left|a e^{i\omega t}\left(1 + Re^{-i\varphi} + R^2 e^{-i2\varphi} + \cdots + R^n e^{-in\varphi}\right)\right|,\ \text{unde: } R\langle 1$$

(în această relație n - numărul de reflexii tinde la infinit și ca rezultat intensitatea razei I_n tinde la zero). Suma acestei progresii geometrice de rație $q = Re^{-i\varphi}$ este:

$$S \cong a e^{i\omega t}\frac{1}{1-q} = a e^{i\omega t}\frac{1}{1 - Re^{-i\varphi}} = a e^{i\omega t}\frac{1}{(1 - R\cos\varphi) - iR\sin\varphi}.$$

Pentru a obține intensitatea radiației transmise se înmulțește expresia de mai sus cu conjugata ei:

$$I = \left[a e^{i\omega t}\frac{1}{(1 - R\cos\varphi) + iR\sin\varphi}\right]\left[a e^{-i\omega t}\frac{1}{(1 - R\cos\varphi) - iR\sin\varphi}\right] =$$

$$= a^2\frac{1}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\varphi}{2}} = a_0^2\frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

(amplitudinea a este o mărime reală).

2. - Considerându-se I_M valoarea maximă a intensității inelelor de interferență, I_m intensitatea minimă (fondul pe care se detașeză inelele), să se calculeze trasmisia sistemului optic $\tau = \frac{I_M}{I_0}$ și contrastul figurii de interferență $C = \frac{I_M}{I_m}$.

R: Din analiza relației: $I = I_0\frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\varphi}{2}}$ rezultă că valoarea maximă a mărimii I (inel luminos) se obține atunci când: $\frac{\varphi}{2} = \frac{2\pi}{2\lambda}2h\cos i = k\pi$, adică: $\Delta = k\lambda$, de unde:

$$I_M = I_0\frac{T^2}{(1-R)^2}.$$

Valoarea minimă se obține pentru:

$\frac{\varphi}{2} = \frac{2\pi}{2\lambda}2h\cos i = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, adică: $\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, de unde:

$$I_m = I_0\frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R} = I_0\frac{T^2}{(1+R)^2}.$$

($I_m \neq 0$ deoarece, ținând cont că $\varphi = (2k+1)\pi$, se poate scrie:

$$A_m = (a - aR) + \left(aR - aR^3\right) + \left(aR^4 - aR^5\right) + \cdots,\ \text{iar } R\langle 1).$$

Prin urmare: $\tau = \frac{I_M}{I_0} = \frac{T^2}{(1-R)^2}$ și $C = \frac{I_M}{I_m} = \frac{(1+R)^2}{(1-R)^2}$.

Dacă: $R = 0{,}81$ se obține: $\tau = 1$ și $C = 90{,}25$.

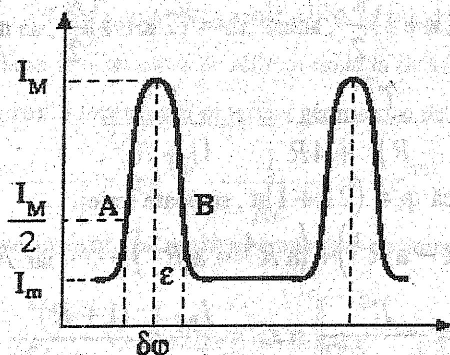
3. - Lărgimea relativă a unui inel se definește ca raportul dintre lățimea inelului (corespunzătoare valorii $\frac{I_M}{2}$) și distanța dintre două inele vecine. Să se determine coeficientul de finețe, definit ca inversul lărgimii relative, și să se arate că puterea de rezoluție este proporțională cu coeficientul de finețe și ordinul de inteferență.

R: In fig. 82 este prezentată variația intensității luminoase în planul focal al lentilei în domeniul inelelor $p-k$, $p-k-1$.

Din relația: $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}2h\cos i$ se observă că pentru $\lambda = ct$, dacă unghiul de incidență (i) crește, atunci diferența de drum optic, respectiv diferența de fază (φ) scade. Diferența de fază între două inele vecine este: $\Delta\varphi_{MM} = 2\pi$. Semilățimea unghiulară a inelului măsurată între punctele A și B este: $\delta\varphi = 2\varepsilon$, unde ε reprezintă distanța unghiulară pentru care intensitatea I_M scade la jumătate.

Deoarece: $I_M = I_0\frac{T^2}{(1-R)^2}$, se poate scrie:

$$I=I_0\frac{T^2}{(1-R)^2}\frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}=I_M\frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$



p	p−k		p−k−1	nr. inelelor
0	i_k	<	i_{k-1}	unghi incidență (i)
φ_p	φ_{p-k}	>	φ_{p-k-1}	dif. faza(φ)
0	$2k\pi$		$2(k-1)\pi$	
2h	$2h-\Delta_k$	>	$2h-\Delta_{k-1}$	dif. drum (Δ)

Fig. 82

Deci dacă: $\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\varepsilon}{2}=1$, atunci: $I_\varepsilon=\frac{I_M}{2}$. Valoarea unghiului ε fiind mică se obține: $\varepsilon=\frac{1-R}{R}$, sau: $\delta\varphi=\frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$, iar lărgimea relativă este dată de relația:

$$F=\frac{\Delta\varphi}{\delta\varphi}=\frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)}.$$

Ex.: $R=0{,}81$, $\delta\varphi=2\varepsilon=\frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}=0{,}42\,\text{rad}=25^\circ$ (variația fazei la trecerea din punctul A în B), iar $F\cong 15$.

Puterea de rezoluție. Considerăm o radiație cu lungimea de undă $\lambda+\delta\lambda$, incidentă pe interferometru sub același unghi de incidență i ca și radiația λ, în așa fel încât datorită variației $\delta\lambda$ inelul de interferență $k_{\lambda+\delta\lambda}$ să fie deplasat față de inelul

k_λ cu diferența $\delta\varphi_{AB}$ (fig. 83). Dacă $\delta\varphi<\delta\varphi_{AB}$ atunci inelele se confundă, iar dacă $\delta\varphi>\delta\varphi_{AB}$ între inele apare deja un inel clar întunecat. Distanța $\delta\varphi_{AB}$ corespunde limitei de rezoluție.

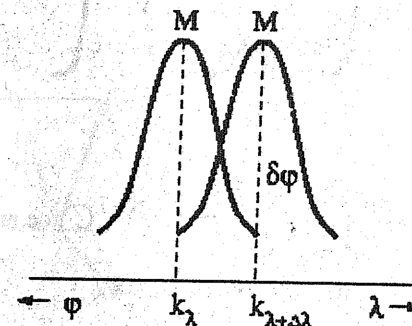


Fig. 83

Din relația: $\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta=\frac{2\pi}{\lambda}2h\cos i$, dacă $i=\text{ct}$, iar lungimea de undă variază se obține: $\delta\varphi=-\frac{2\pi\delta\lambda}{\lambda^2}2h\cos i$, sau: $\left(\frac{\delta\varphi}{\varphi}\right)_{i=\text{ct}}=-\frac{\delta\lambda}{\lambda}$.

Puterea de rezoluție: $R=\frac{\lambda}{\delta\lambda}=\frac{\varphi}{\delta\varphi}=\frac{2k\pi}{\delta\varphi}=\frac{\Delta\varphi}{\delta\varphi}k=kF$.

Ex.: $h=1$, $\lambda=500\,\text{nm}$, $k\cong\frac{2h}{\lambda}=\frac{20000}{0{,}5}=40000$.

$$R=kF=40000\cdot 15=600000.$$

4. - In vecinătatea spectrală a radiației intense cu $\lambda=600\,\text{nm}$ trebuie să se observe un satelit de intensitate mică $i_0=0{,}003I_0$. Grosimea etalonului a fost aleasă astfel încât cele două sisteme de inele de interferență sunt practic în discordanță. Să se calculeze contrastul C și factorul de reflexie R necesar observării satelitului, știind că acesta este observabil dacă intensitatea inelelor sale este egală cu cel puțin $1/5$ din intensitatea fondului.

R: Anterior s-a stabilit că:

$$I_m=I_0\frac{T^2}{(1+R)^2},\ \text{iar}\ i_M=i_0\frac{T^2}{(1-R)^2}.$$

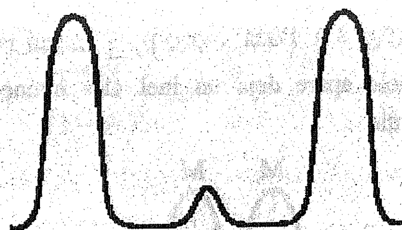


Fig. 84

Deci: $$\frac{i_M}{I_m}=\frac{1}{5}=\frac{i_0}{I_0}\left(\frac{1+R}{1-R}\right)^2=3\cdot 10^{-3}C\text{, de unde:}$$

$$C=66{,}66 \text{ și } R=0{,}782.$$

5. - Să se calculeze intensitățile I_M și I_m transmise de etalonul din sticlă cu indicele de refracție n ale cărui oglinzi (M_1 și M_2) prezintă coeficienți de reflexie diferiți. Coeficientul de reflexie al stratului M_1 este $R=r^2$, cel al stratului M_2 este $R_1=r_1^2$. Se neglijează absorția în straturile reflectante și în sticlă. Să se arate că acest etalon se comportă ca o pătură a cărei coeficient de reflexie, pentru $\varphi=2k\pi$, este egal cu: $R'=r'^2=\left(\frac{r_2-r}{1-rr_2}\right)^2$. Care ar fi coeficientul de reflexie al acestui strat fictiv pentru $\varphi=(2k+1)\pi$ (fig. 84 a).

R: Deci: - T^2 se înlocuiește cu $TT_1=(1-r^2)(1-r_1^2)$

- R^2 se înlocuiește cu RR_1, adică: $R=\sqrt{RR_1}=rr_1$.

Diferența de fază devine: $\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}2nh\cos r$ (a se demonstra). In aceste condiții distribuția intensității în planul focal al lentilei este dată de relația:

$$I=I_0\frac{(1-r^2)(1-r_1^2)}{(1-rr_1)^2+4rr_1\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Dacă $\Delta=k\lambda$, adică $\varphi=2k\pi$, se obține:

$$I_M=I_0\frac{(1-r^2)(1-r_1^2)}{(1-rr_1)^2},$$

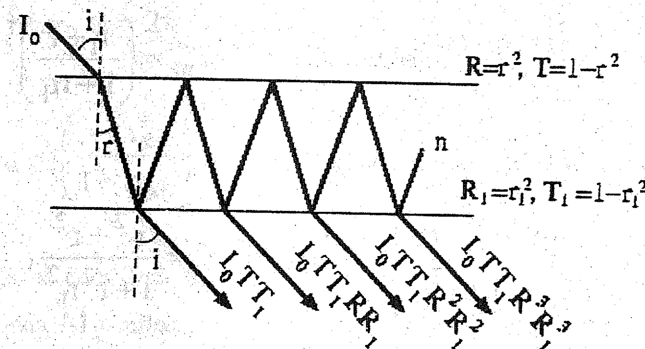


Fig. 84 a

iar pentru $\Delta=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$, adică $\varphi=(2k+1)\pi$ se obține:

$$I_m=I_0\frac{(1-r^2)(1-r_1^2)}{(1+rr_1)^2}.$$

Pentru o situație intermediară, de ex. $\varphi=(4k\pm1)\frac{\pi}{2}$ se obține:

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\text{, deci:}$$

$$I=I_0\frac{(1-r^2)(1-r_1^2)}{(1-rr_1)^2+4rr_1\frac{1}{2}}=I_0\frac{(1-r^2)(1-r_1^2)}{1+r^2r_1^2}.$$

Stratul reflectant echivalent.

Pentru $\varphi=2k\pi$ se obține un factor de transmisie:

$$T'_M=\frac{I_M}{I_0}=\frac{(1-r^2)(1-r_1^2)}{(1-rr_1)^2},$$

căruia îi corespunde un coeficient de reflexie:

$$R'_M = 1 - T'_M = \frac{I_M}{I_0} = \left(\frac{r_1 - r}{1 - rr_1}\right)^2 = r'^{\,2}_M .$$

Pentru $\varphi = (2k+1)\pi$ se obține:

$$T'_m = \frac{\left(1-r^2\right)\left(1-r_1^{\,2}\right)}{(1+rr_1)^2}, \text{ respectiv: } R'_m = 1 - T'_m = \left(\frac{r_1 + r}{1 + rr_1}\right)^2 = r'^{\,2}_m .$$

Pentru $\varphi = (4k \pm 1)\frac{\pi}{2}$, se obține:

$$T' = \frac{\left(1-r^2\right)\left(1-r_1^{\,2}\right)}{1+r^2 r_1^{\,2}}, \text{ respectiv: } R' = \frac{r_1^{\,2} + r^2}{1 + r^2 r_1^{\,2}} .$$

6. - Etalonul dublu. Se realizează un etalon dublu, un etalon format din lama de sticlă M_1M_2, celălalt din lama de aer M_2M_3. Ambele etaloane au aceeași grosime optică și sunt iluminate sub incidență normală. Coeficientul de reflexie al straturilor M_1 și M_3 este $R = r^2$, iar cel al stratului M_2 este $R_1 = r_1^{\,2}$. Se neglijează absorția în cele trei straturi. Să se calculeze factorul de reflexie R'' al etalonului dublu pentru $\varphi = 2k\pi$. Să se stabilească relația dintre r și r_1 pentru care s-ar obține transparența maximă la trecerea radiației optice prin etalon.

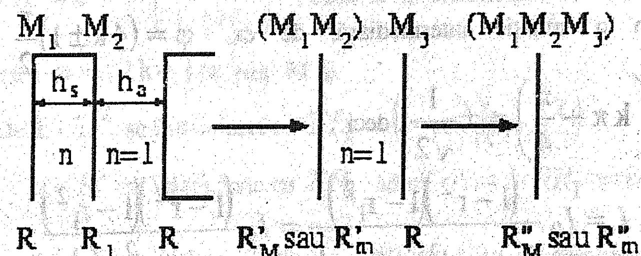


Fig. 85

R: La fel ca în cazul precedent în care cele două straturi M_1 și M_2 s-au înlocuit printr-unul singur (M_1M_2) cu coeficient de reflexie R', tot așa stratul fictiv (M_1M_2) și M_3 poate fi înlocuit prin stratul fictiv $(M_1M_2M_3)$ caracterizat prin coeficientul de reflexie R'' (fig. 85).

Grosimile celor două etaloane sunt $nh_s = h_a$. Pentru incidență aproape normală ($r \cong i$), pentru ambele etaloane, este îndeplinită simultan condiția $\varphi = 2k\pi$, sau:

$$\delta = k\lambda = 2nh_s \cos r \cong 2h_a \cos i .$$

Dacă $r_1 \rangle r$, pentru $\varphi = 2k\pi$, se obține:

$$R''_M = \left(\frac{r - r'_M}{1 - rr'_M}\right)^2 = \left[\frac{r - \dfrac{r_1 - r}{1 - rr_1}}{1 - r\dfrac{r_1 - r}{1 - rr_1}}\right]^2 = \left(\frac{2r - r^2 r_1 - r_1}{1 - 2rr_1 + r^2}\right)^2 .$$

Dacă se consideră $r_1 = 1 \rangle r$ se obține $R''_M = 1$, ceea ce era de așteptat, deoarece oglinda M_2 reflectă tot fluxul de radiație incident pe strat.

Dacă $r_1 \langle r$ atunci: $R''_M = \left[\frac{r - \dfrac{r - r_1}{1 - rr_1}}{1 - r\dfrac{r - r_1}{1 - rr_1}}\right]^2 = r_1^{\,2} .$

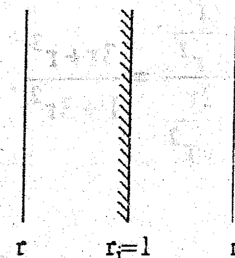


Fig. 86

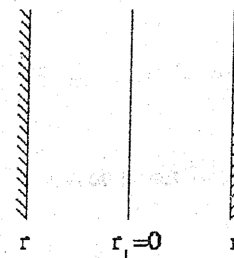


Fig. 87

Dacă presupunem $r_1 = 0 \rangle r$, M_2 nu mai joacă nici un rol, problema reducându-se la un singur etalon. Im acest caz se obține: $I_M = I_0 \dfrac{T^2}{1 - R^2} = I_0$ ($T = 1 - R$), deoarece lipsesc pierderile de energie prin absorbție.

Problema transparenței maxime. Transparența maximă se obține atunci când valoarea mărimii R''_M este minimă. Când $r_1 \langle r$ s-a obținut $\sqrt{R''_M} = r_1$ a cărui minim corespunde valorii $r_1 = 0$. Prin urmare se obține $R''_M = 0$, adică $T''_M = 1$.

Cazul $r_1 \rangle r$ conduce la valoarea $R''_M = 0$ când este îndeplinită condiția: $2r - r^2 r_1 - r_1 = 0$, de unde: $r_1 = \dfrac{2r}{1+r^2}$, deci:

$$1 \rangle r_1 = \frac{2r}{1+r^2} \rangle r$$

Pentru această valoare se obține $I_M = I_0$ pentru inelele luminoase $(\varphi = 2k\pi)$. Dacă nu este realizată condiția de transparență maximă, atunci $I_M \langle I_0$ datorită pierderilor de energie prin reflexii succesive.

7. - Să se evalueze intensitățile I_M și I_m transmise de către etalonul dublu. Să se calculeze contrastul pentru o valoare a coeficientului de reflexie al straturilor extreme egală cu $R_2 = 0{,}81$.

R: Să considerăm cazul $r_1 = \dfrac{2r}{1+r^2} \rangle r$ (fig. 88). Pentru acest caz, când $\varphi = 2k\pi$ am stabilit că $R''_M = 0$, adică $T''_M = 1$, ceea ce conduce la dă $I_M = I_0$. Să calculăm valoarea I_m $(\varphi = (2k+1)\pi)$ pentru același caz. Pentru primul etalon se obține: $r'_m = \dfrac{r_1 + r}{1 + r r_1} = \dfrac{r + \dfrac{2r}{1+r^2}}{1 + r\dfrac{2r}{1+r^2}} = \dfrac{3r + r^3}{1+3r^2}$, iar pentru etalonul dublu, coeficientul de reflexie va fi:

$$R''_m = \left(\frac{r + r'_m}{1+r}\right)^2 = \left[\frac{r + \dfrac{3r+r^3}{1+3r^2}}{1 + r\dfrac{3r+r^3}{1+3r^2}}\right]^2 = \left(\frac{4r + 4r^3}{1+6r^2+r^4}\right)^2.$$

Prin urmare: $T''_m = 1 - R''_m = \dfrac{\left(1-r^2\right)^4}{\left(1+6r^2+r^4\right)^2}$. Însă: $T''_m = \dfrac{I_m}{I_0}$, deci:

$$I_m = I_0 \frac{\left(1-r^2\right)^4}{\left(1+6r^2+r^4\right)^2}.$$

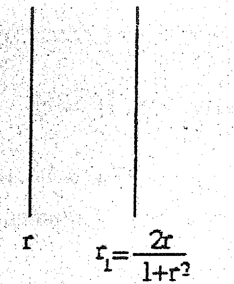


Fig. 88

De unde contrastul: $C = \dfrac{I_M}{I_m} = \dfrac{\left(1+6R+R^2\right)^2}{(1-R)^2}$, deoarece $R = r^2$.

Pentru $R = 0{,}81$ se obține $C = 32581$ (un factor de contrast foarte mare).

Interferometrul Fabry-Perot. Filtru inteferențial.

Se consideră interferometrul din problema precedentă (fig. 81). Grosimea lamei de aer este egală cu h. Se notează cu i unghiul de incidență, iar a_0 reprezintă amplitudinea vibrației luminoase incidente. Coeficienții de reflexie și de transmisie a celor două straturi reflectante sunt identici și egali cu R, respectiv T. Se neglijează variațiile de fază la reflexia pe stratul *semi*argintat. Lungimea de undă a radiației incidente, calculată în aer, este egală cu λ. Considerând diferențele de fază φ, 2φ, 3φ, , se compun amplitudinile diverselor raze emergente paralele ce provin din radiația incidentă sub unghi i și care converg în același punct al planului focal al obiectivului unei lunete de observare. In urma calculului, în problema precedentă s-a obținut:

$$I = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Deoarece $I = a^2$ și $I_0 = a_0{}^2$ se obține funcția:

$$I(\varphi) = \frac{a^2}{a_0{}^2} = \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

care reprezintă "funcția de aparat".

1. - Să se reprezinte grafic "funcția aparatului" ($R = 0{,}75$, $T = 0{,}15$).

R: a) Se observă că valoarea maximă $I(\varphi) = I_M$ a funcției $I(\varphi)$ se obține pentru $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$, adică $\varphi = 2k\pi$, respectiv $\Delta = k\lambda$. Acest fapt ($\varphi = 2k\pi, \Delta = k\lambda$) ne arată că razele I_1, I_2, I_3, , sosesc în concordanță de fază în punctul corespunzător unghiului de incidență i din planul focal (fig. 81). Pentru acest caz: $I(\varphi) = I_M = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2$. Dacă se notează: $m = \frac{4R}{(1-R)^2}$, atunci se obține:

$$I(\varphi) = \frac{I_M}{1 + m\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

b) Maximele de intensitate sunt foarte înguste. Aspectul lor este determinat de parametrul m.

Dacă $R = 0{,}75$ și $T = 0{,}15$ atunci $m = 48$ și $I_M = 0{,}36$, iar

$$I(\varphi) = \frac{0{,}36}{1 + 48\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{0{,}36}{D}.$$

Să construim graficul funcției $I(\varphi)$ (fig. 89):

φ	0	60	90	120	180
$\varphi/2$	0	30	45	60	90
$\sin^2\varphi/2$	0	1/4	1/2	3/4	1
D	1	13	25	37	49
I	0,36	0,028	0,014	0,0096	0,007
I_M	1	0,08	0,04	0,07	0,019

Semilățimea conturului maximului de interferență ($I = \frac{I_M}{2}$) se obține pentru: $\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{48}$, de unde: $\varphi = 16^\circ 30'$ (variația fazei pentrtu punctele corespunzătoare semilățimii).

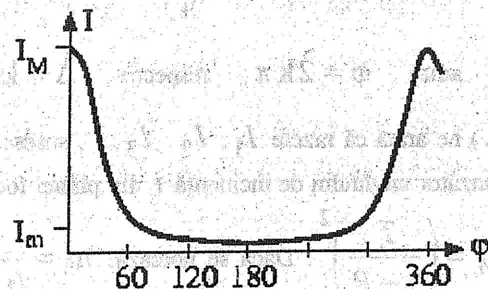


Fig.89

2. - Pentru observarea figurii de interferență se folosește dispozitivul prezentat în fig. 90, unde S este o sursă monocromatică de dimensiuni mici, L - lunetă de observare reglată pentru infinit și care are un micrometru ocular, iar MN reprezintă interferometrul Fabry-Perot.

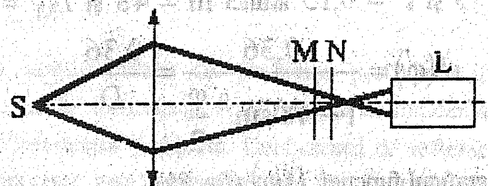


Fig. 90

a) Notând cu i_k, i_{k+1}, i_{k+2} unghiurile de incidență exprimate în radiani care determină inelele luminoase cele mai centrale (incidență aproape normală) corespunzătoare ordinelor de interferență k, $k+1$, $k+2$, să se calculeze valorile i_k^2, i_{k+1}^2, i_{k+2}^2.

R: Inelele luminoase se obțin dacă este îndeplinită condiția:

$$\Delta = 2h\cos i_k = 2h\sqrt{1-\sin^2 i_k} \cong 2h\left(1-\frac{i_k^2}{2}\right) = k\lambda$$

(incidență aproape normală).

Pentru incidență normală se obține: $2h = p\lambda$.

Deci: $i_k^2 = 2 - \frac{k\lambda}{h} = 2\left(1-\frac{k}{p}\right)$, unde: $k \le p = \frac{2h}{\lambda}$, deoarece mărimea numărului k se micșorează atunci când valoarea unghiului de incidență crește.

b) Pe un același grafic, pentru $\lambda = 508{,}6\,nm$, să se construiască porțiunile din curbe care descriu variațiile mărimilor i_k^2, i_{k+1}^2, i_{k+2}^2, funcție de mărimea h, atunci când aceasta variază de la $2542{,}5\mu m$ la $2543{,}8\mu m$.

R: Este necesar să se reprezinte funcția $i^2 = f(h)$ pentru diferite valori ale parametrului k. Această legătură are forma: $i_k^2 = 2 - \frac{k\lambda}{h}$ și reprezintă o familie de hiperbole.

Deoarece $h = \frac{p}{2}\lambda$, grosimii $h = 2543\mu m$ îi corespunde, în centru (incidență normală), ordinul de interferență $p = 10000$, iar $i_{10000}^2 = 0$ $(k = p)$.

Dacă grosimea h crește sau scade cu $n\frac{\lambda}{2}$ ($h = 2543 \pm n\frac{\lambda}{2}$), atunci ordinul de interferență în centru va fi:

$p' = 10000 \pm n$. Pentru toate aceste grosimi centrul va fi iluminat.

Pentru $h = 2543\mu m$ $(p = 10^4)$ inelele luminoase succesive corespund la $k = 10^4 - n$, iar unghiurile de incidență corespunzătoare sunt:

$$i_n^2 = 2\left(1-\frac{10^4-n}{10^4}\right) = \frac{n}{5000}.$$

Dacă: $h' = \left(2543+\frac{\lambda}{2}\right)\mu m$, adică $p' = 10001$, atunci:

$$i_n'^2 = 2\left(1-\frac{1001-n}{10001}\right) = \frac{n}{5000{,}5},$$

iar pentru $h'' = \left(2543-\frac{\lambda}{2}\right)\mu m$, $(p'' = 9999)$, se obține: $i_n''^2 = \frac{n}{4999{,}5}$.

In cazul de față grosimea h a etalonului variază între punctele $A(2542{,}5\mu m)$ și $B(2543{,}8\mu m)$ (fig. 91). Pe axa abciselor este reprezentată variația grosimii etalonului, (a ordinului de interferență) pentru incidență normală. Pe axa ordonatelor, corespunzător fiecărui ordin de interferență p întreg (centru luminat), sunt reprezentate valorile unghiului de incidență ($i_{k(n)}^2$) corespunzătoare inelelor luminoase. Curbele punctate unesc valorile unghiurilor de incidență ale inelelor

luminoase, caracterizate prin aceeaşi valoare a mărimii k, obţinute atunci când variază grosimea h a etalonului. Aceste curbe sunt nişte parabole care, în domeniul îngust de variaţie a mărimii h, pot fi aproximate prin nişte drepte. Aceste drepte, în primă aproximaţie, pot fi considerate paralele între ele. Panta lor este:

$$\tan\alpha = \frac{1}{5000}\frac{2}{\lambda} = \frac{1}{1221{,}5}\,\text{rad}/\mu\text{m}.$$



Fig. 91

c) Să se utilizeze aceste curbe pentru analiza deplasării inelelor funcţie de variaţia mărimii h şi la determinarea unghiurilor de incidenţă corespunzătoare valorilor $h = 2543\mu\text{m}$ şi $h = 2542{,}9\mu\text{m}$.

R: Dacă valoarea mărimii h creşte atunci inelele se lărgesc, iar pentru $\Delta h = \dfrac{\lambda}{2}$ în centru apare un inel nou; dacă valoarea h se micşorează, diametrul inelelor de micşorează, iar pentru $\Delta h = -\dfrac{\lambda}{2}$, în centru, dispare un inel. Această concluzie reiese din analiza graficului sau din relaţia: $\Delta = 2h\left(1-\dfrac{i_k^2}{2}\right) = k\lambda$, unde valoarea k este constantă. De asemenea trebuie remarcat faptul că atunci când valoarea h scade distanţa dintre inelele vecine creşte, şi invers.

De ex. $p = 10004 \rightarrow i_{n=4}^2 - i_3^2 = \dfrac{1}{5002}$, iar pentru;

$$p = 9998 \rightarrow i_{n=4}^2 - i_3^2 = \frac{1}{4999}$$

Determinarea unghiurilor de incidenţă. Pentru $h = 2543\mu\text{m}$ unghiurile de incidenţă, conform graficului din fig. 91, sunt egale cu:

$$i_n = \sqrt{\frac{n}{5000}}\,\text{rad}.$$

Pentru $h = 2542{,}9\mu\text{m}$ (punctul C) unghiurile de incidenţă vor fi egale cu:

$$\sqrt{\frac{n}{5000} - 0{,}1\tan\alpha} \cong \frac{1}{100}\sqrt{2n-0{,}8}.$$

3. - Să considerăm cazul când ordinul p de interferenţă în centru nu este întreg: $p = k+\varepsilon$ (k - număr întreg, ε - un excedent fracţionar). Să se evalueze mărimea ε funcţie de k şi de unghiul i în raport cu primul inel (adică plecând de la centru).

Aplicaţie. Se compară o lungime de undă λ', foarte apropiată de $\lambda = 561{,}56\text{nm}$, cu lungimea de undă etalon $\lambda = 508{,}5824\text{nm}$. Se găseşte că pentru o aceeaşi grosime h a interferometrului, "diametrele unghiulare" $2i$ ale primului inel λ şi ale primului inel λ', evaluate în "numărul de rotaţii complete m ale micrometrului ocular" sunt $m = 7{,}06$, respectiv $m' = 5{,}72$. Etalonarea prealabilă a micrometrului a dat $2i = 0{,}002649\,m$, unde valoarea i este exprimată în radiani. Pe de altă parte măsurători suplimentare au permis să se stabilească că primul inel corespunde ordinului de interferenţă $k = 19484$. Să se calculeze valoarea lungimii de undă λ'.

R: În centru nu avem maxim de intensitate ci o situaţie intermediară între maxim şi minim (pe graficul din fig. 91, punctul D). Pe grafic, în punctul E, se poate scrie relaţia: $2h = (k+\varepsilon)\lambda$, iar pentru inelul luminos din punctul D se poate scrie:

$$2h\left(1-\frac{i_k^2}{2}\right) = k\lambda.$$

De unde: $\varepsilon = \dfrac{h}{\lambda}i_k^2 \cong \dfrac{k}{2}i_k^2 = \dfrac{k}{8}(2i_k)^2.$

Aplicație: Lungimii de undă etalon $\lambda = 508{,}5824\,\text{nm}$ îi corespunde "diametrul unghiular" $2i = 7{,}06 \cdot 2649 \cdot 10^{-6}\,\text{rad}$ și $k = 19484$.

Deci: $\varepsilon = \dfrac{19484 \cdot (7{,}06 \cdot 2649 \cdot 10^{-6})^2}{8 \cdot 10^{12}} \cong 0{,}85185$.

Ordinul de interferență al primului inel luminos corespunzător lungimii de undă λ' este:

$$(k+\varepsilon)\lambda = k'\lambda', \text{ deci } k' = (k+\varepsilon)\frac{\lambda}{\lambda'} = 17646 \pm 0{,}34.$$

O eroare de 0,1 asupra lui λ' antrenează cunoașterea mărimii k' până la $\dfrac{1}{56000}$, deci k' este egal cu 17646.

Calculăm excedentul fracționar ε' corespunzător lui k':

$$\varepsilon' = \frac{17646 \cdot (5{,}72 \cdot 2649 \cdot 10^{-6})^2}{8} = 0{,}506,$$

deci: $$\lambda' = \frac{19484{,}851 \cdot 5085{,}824}{17646{,}506} = 561{,}5645\,\text{nm}$$

4. - Să considerăm din nou relația $I = I(\varphi)$.

a) Să se reprezinte grafic, pentru o variație a mărimii φ între limitele $2k\pi \div 2(k+1)\pi$, funcția $\dfrac{I}{I_{max}}$, considerând valorile $R = 0{,}5; 0{,}7; 0{,}9$. Se vor utiliza ordonate logaritmice. Să se arate că este logic să se definească "contrastul" prin raportul $C = \dfrac{I_M}{I_m}$. Care este valoarea contrastului? Cum variază contrastul în funcție de coeficientul de reflexie R?

R: Anterior s-a stabilit că (vezi tabelul și fig. 92):

$$I(\varphi) = \frac{I}{I_M} = \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \text{ unde: } I_M = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2 \text{ și } m = \frac{4R}{(1-R)^2}.$$

Intensitatea luminoasă în planul focal al lentilei variază între o valoare maximă I_M și una minimă I_m. Deci inelele luminoase apar pe un fond care nu este complet întunecat. Prin urmare "contrastul" trebuie definit sub forma:

	$\varphi = 0$	60	90	120	180
	$\sin^2 \varphi/2 = 0$	1/4	1/2	3/4	1
$R = 0{,}5$, $m = 8$	$I(\varphi)$ 1	1/3	1/5	1/7	1/7
$R = 0{,}7$, $m = \frac{280}{9}$	1	1/8,77	1/16,5	1/24,3	1/32
$R = 0{,}9$, $m = 360$	1	1/91	1/181	1/271	1/361

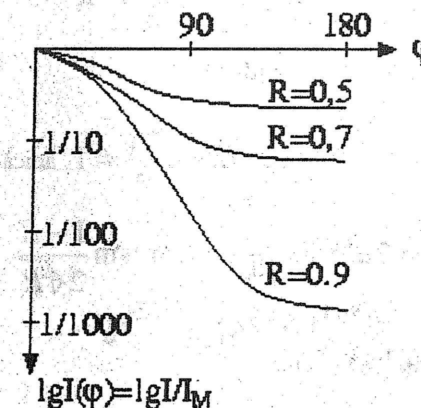


Fig. 92

$$C = \frac{I_M}{I_m} = \frac{I_M}{\dfrac{I_M}{1+m}} = 1 + m = \left(\frac{1+R}{1-R}\right)^2.$$

Deci:

$R =$	0,5	0,7	0,9
$C =$	9	32	361

(începând cu valorile $R = 0{,}7$ contrastul figurii de interferență crește foarte repede – fig. 93).

b) Să se evalueze în fracțiuni de interfranjă lărgimea unui inel luminos corespunzătoare "*semi*înălțimii" acestuia. Să se calculeze în funcție de R "coeficientul

de fineţe" F, adică raportul dintre interfranjă şi lărgimea determinată mai sus. Cum variază F în funcţie de R?

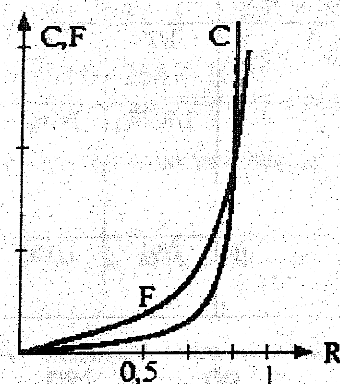


Fig. 93

R: Se obţine: $I_{\varphi_1} = \frac{I_M}{2}$, dacă: $m \sin\frac{\varphi_1}{2} = 1$, adică:

$$\varphi_1 = 2\arcsin\sqrt{\frac{1}{m}} = 2\arcsin\frac{1-R}{2\sqrt{R}}$$

(acest unghi reprezintă diferenţa de fază $\varphi_{I_M/2} - \varphi_{I_M}$).

Deci coeficientul de fineţe este:

$$F = \frac{\pi}{\varphi_1} = \frac{\pi}{2\arcsin\frac{1-R}{2\sqrt{R}}} \text{ (fig. 93).}$$

$R = 0{,}5$	$\varphi_1 = 41^o24'$	$F = \frac{180^o}{\varphi_1} = 4{,}32$
$R = 0{,}7$	$\varphi_1 = 29^o39'$	$F = 8{,}7$
$R = 0{,}9$	$\varphi_1 = 6^o2'$	$F = 30$

c) Admiţând că interferometrul poate să separe două radiaţii ale căror lungimi de undă diferă prin intervalul $d\lambda$, care corespunde unui decalaj între maximele de intensitate ale inelelor vecine egal cu lărgimea inelului, să se calculeze puterea de

rezoluţie $R = \frac{\lambda}{d\lambda}$ funcţie de ordinul de interferenţă k şi de coeficientul de fineţe F.

Cum variază puterea de rezoluţie funcţie de R?.

R: Intr-un punct dat al planului focal, adică pentru o valoare determinată a unghiului de indicenţă i, diferenţa de drum optic $\Delta = 2h\cos i$ este constantă. Diferenţa de fază $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$ variază cu lungimea de undă a radiaţiei: $\frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{d\lambda}{\lambda}$.

Să considerăm un inel luminos corespunzător radiaţiei λ; în acest caz avem $\Delta = k\lambda$ şi $\varphi = 2k\pi$. In acelaşi loc, dacă pentru radiaţia $\lambda + d\lambda$ avem o diferenţă de fază $\varphi \pm 2\varphi_1$, cele două radiaţii apar separate (fig. 94). Deci $d\varphi = 2\varphi_1$ prin urmare:

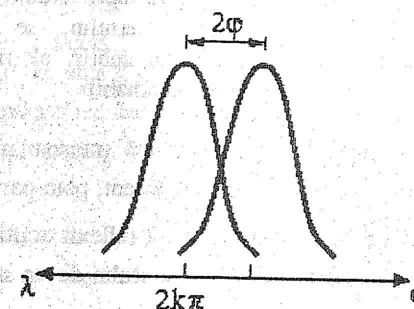


Fig. 94

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{\varphi}{d\varphi} = \frac{2k\pi}{2\varphi_1} = kF.$$

Variaţia mărimii R funcţie de coeficientul de reflexie R este asemănătoare cu variaţia mărimii F funcţie de R.

c) Să se analizeze coeficientul de transmisie τ al interferometrului corespunzător intensităţii maxime a ineleor. Să se evalueze transmisia funcţie de mărimea R şi de absorbţia $A = 1-(T+R)$. Cum variază mărimea τ? Se poate, fără a influenţa transmisia interferometrului, să se crească mărimea R peste valoarea 0,9?

R: Transmisia interferometrului este dată de relaţia:

$$\tau = \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \frac{I}{I_0}.$$

In cazul intensităţii maxime:

$$\tau = \frac{I_M}{I_0} = I_M = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2, \text{ deoarece } I_0 = 1.$$

$$\text{Deci: } \tau = \left[\frac{1-(A+R)}{1-R}\right]^2 = \left[1 - \frac{A}{1-R}\right]^2, \text{ unde: } A \langle\langle R.$$

Dacă stratul reflectant este neabsorbant, atunci $A = 0$, deci $\tau = 1$. In realitate, pentru a creşte coeficientul de reflexie R se creşte grosimea stratului metalic, ceea ce determină şi o creştere a coeficientului de absorţie A. Pentru stratul masiv de metal avem $T = 0$, $A = 0{,}05$ şi $R = 0{,}95$, însă $\tau = 0$, deci există o grosime optimă a stratului de metal.

5. - Pentru a înlătura imposibilitatea de a creşte coeficientul de reflexie R fără a diminua valoarea transmisiei τ a interferometrului, se utilizează lame semitransparente obţinute prin depunerea de straturi subţiri alternative (indice de refracţie mic / indice de refracţie mare) de grosimi convenabile.

a) Să considerăm la inceput o lamă de sticlă transparentă cu indicele de refracţie n_2 pe care este depus un strat subţire transparent, plan-paralel cu indicele de refracţie $n_1 \rangle n_2$. O rază incidentă suferă în acest strat reflexii multiple. Să se arate că în cazul unei incidenţe normale şi a unui grosimi a stratului de un sfert de lungime de undă ($n_1 h = \frac{\lambda}{4}$), valoarea coeficientului echivalent de reflexie este dată de relaţia:

$$R = \left(\frac{n_1^2 - n_2}{n_1^2 + n_2}\right)^2,$$

care este mai mare decât coeficientul de reflexie al lamei de sticlă neacoperită. Ex.: $n_1 = 2{,}3$ şi $n_2 = 1{,}5$. Să se generalizeze această problemă.

R: Să considerăm o suprafaţă plană ce separă două medii cu indicii de refrancţie ν_1 şi ν_2. Să notăm cu r, respectiv r' coeficienţii de reflexie pentru amplitudine pentru cele două sensuri de traversare a suprafeţei. Coeficienţii de transmisie sunt t, respectiv t'. Conform relaţiilor lui Fresnel relativ la reflexie pe suprafeţe sticloase sub incidenţă normală, se obţine:

$$r = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \text{ şi } r' = -r = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1 + \nu_2}$$

$$t = 1 - r = \frac{2\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \text{ şi } t' = 1 - r' = 1 + r = \frac{2\nu_1}{\nu_1 + \nu_2},$$

de unde: $$tt' = 1 - r^2 \text{ (fig. 95).}$$

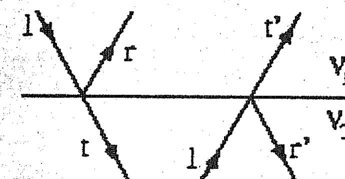


Fig. 95

In relaţiile de mai sus s-a considerat defazajul $\Delta\varphi = \pi$ care apare atunci când raza incidentă şi cea reflectată se află într-un mediu cu indicele de refracţie mai mic decât mediul pe care se face reflexia. In această problemă trebuie să considerăm două suprafeţe: prima separă două medii de indici de refracţie 1 şi n_1 n₁, iar cea de a doua separă mediile de indici n_1 şi n_2 (fig. 96).

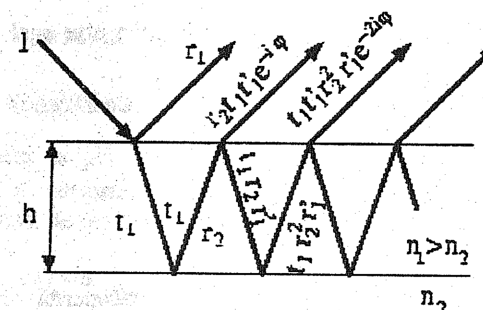


Fig. 96

Pentru prima suprafaţă, aplicând relaţiile de mai sus, se obţine:

$$r_1 = \frac{1 - n_1}{1 + n_1},\ r_1' = \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1},\ t_1 t_1' = \frac{4n_1}{(n_1 + 1)^2}.$$

Pentru cea de a doua suprafaţă: $r_2 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$.

Amplitudinea primei raze reflectate (dacă valoarea amplitudinii incidente este egală cu 1) este egală cu $r_1 = \frac{1 - n_1}{1 + n_1}$. Cea de a doua rază a fost transmisă (t_1),

reflectată (r_2) şi din nou transmisă (t_1'). Drumul optic suplimentar $2n_1h_1$ a introdus o întârziere de fază egală cu φ, deci fazorul celei de a doua raze va fi: $tt'r_2 e^{-i\varphi}$. Cu alte cuvinte, aşa cum am stabilit şi la analiza interferometrului, la fiecare reflexie amplitudinea precedentă se amplifică cu $q = r_1'r_2 e^{-i\varphi}$.

Amplitudinea rezultantă totală este:

$$A = r_1 + t_1t_1'r_2 e^{-i\varphi} + t_1t_1'r_1'r_2{}^2 e^{-i2\varphi} + t_1t_1'r_1'r_2{}^3 e^{-i3\varphi} + \cdots =$$

$$= \frac{1-n_1}{1+n_1} + t_1t_1'r_2 e^{-i\varphi}\left(1+q+q^2+\cdots\right) = \frac{1-n_1}{1+n_1} + \frac{t_1t_1'r_2 e^{-i\varphi}}{1-r_1'r_2 e^{-i\varphi}}$$

Deoarece grosimea stratului depus este egală cu un sfert de lungime de undă, atunci:

$$n_1h_1 = \frac{\lambda}{4}, \text{ deci: } \Delta = \frac{\lambda}{2}, \text{ iar } \varphi = \pi, \text{ de unde: } e^{-i\varphi} = -1.$$

Deci: $$A = -\frac{n_1^2 - n_2}{n_1^2 + n_2}.$$

Prin urmare coeficientul de reflexie pentru amplitudine este egal cu: $\dfrac{n_1^2 - n_2}{n_1^2 + n_2}$, iar vibraţia reflectată a suferit un defazaj egal cu π. Coeficientul de reflexie pentru intensitate este egal cu:

$$R = \left(\frac{n_1^2 - n_2}{n_1^2 + n_2}\right)^2.$$

Pentru o lamă de sticlă ($n = 1{,}5$) neacoperită cu strat reflectant: $R = \left(\dfrac{n_2 - 1}{n_2 + 1}\right)^2 = 0{,}04$. Pentru aceeaşi lamă acoperită cu strat reflectant de grosime egală cu un sfert de lungime de undă şi cu $n_1 \rangle n_2$ ($n = 2{,}3$) se obţine un coeficient de reflexie: $R = 0{,}314 \rangle\rangle 0{,}04$.

Generalizare. Să considerăm o lamă *semi*transparentă pe care au fost depuse straturi alternative (indice de refracţie mic/indice de refracţie mare) în aşa fel încât în fiecare strat drumul optic $\Delta = nh$ este egal cu un sfert de lungime de undă. Se observă uşor că oricât de profund ar fi stratul pe care are loc reflexia razei incidente, întârzierea de fază corespunde totdeauna la $\Delta = \dfrac{\lambda}{2}$. Deci toate razele, oricâte reflexii

şi transmisii ar suferi, sunt în fază. Remarcăm că un strat prezintă un drum optic egal cu $\dfrac{\lambda}{4}$ numai pentru o radiaţie sau un domeniu spectral îngust în jurul acestei lungimi de undă, deci coeficientul de reflexie variază în mod selectiv cu lungimea de undă.

b) Să se arate că raportul $\dfrac{T}{1-R}$ rămâne acelaşi indiferent dacă se utilizează o lamă de sticlă *semi*transparentă obişnuită sau una a cărei reflexie a fost îmbunătăţită prin depunerea de straturi $\dfrac{\lambda}{4}$ alternative. Prezintă interes această proprietate pentru un interferometru Fabry-Perot?

Aplicaţie. Să se calculeze puterea de rezoluţie teoretică pentru $\lambda = 546{,}1\,\text{nm}$ a unui interferometru Fabry-Perot de grosime $h = 7{,}5\,\text{mm}$ a cărui feţe *semi*transparente sunt acoperite de straturi alternative de criolit şi sulfură de zinc de grosime optică egală cu $\dfrac{\lambda}{4}$. Coeficientul de reflexie al straturilor este $R = 0{,}94$, iar $A = 0{,}01$ şi $T = 0{,}05$.

R: Deoarece straturile subţiri depuse pe lamă sunt transparente (coeficient de absorţie foarte mic), utilizând straturi cu grosimi optice de $\dfrac{\lambda}{4}$ din materiale cu $n_1 \rangle n_2$ coeficientul de reflexie al plăcilor etalonului poate fi mărit fără a modifica în mod sensibil coeficientul de absorţie. Deoarece creşte valoarea mărimii R, deasemenea creşte şi valoarea puterii de rezoluţie a etalonului.

Ex.: $R = 0{,}94$, deci $m = \dfrac{4R}{(1-R)^2} = \dfrac{37{,}6}{36} \cdot 10^6$.

*Semi*lăţimea inelului luminos:

$$I = \frac{I_M}{2}, \text{ pentru: } \sin^2\frac{\varphi_1}{2} = \frac{1}{m}, \text{ de unde: } \varphi_1 = \frac{6}{67}\,\text{rad}.$$

Contrastul: $$F = \frac{2\pi}{2\varphi_1} = \frac{2\pi \cdot 97}{2 \cdot 6} = 51$$

(a se compara cu rezultatele anterioare).

Ordinul de interferenţă: $k = \dfrac{2h}{\lambda} 27468$.

Puterea de rezoluţie: $R = kF = 1400000$.

6. - Se va analiza modul cum imperfecțiunile suprafeței interferometrului limitează posibilitățile acestuia de a fi folosit.

a) Să presupunem că suprafața utilă S a acestuia prezintă accidente de relief care determină variații ale mărimii φ cu valori $d\varphi$ cuprinse între valorile extreme $\varepsilon \div -\varepsilon$. Se admite că în acest interval funcția de repartiție $f = \dfrac{ds}{d\varphi}$ este constantă. Să se calculeze noua expresie a funcției $I = I(\varphi)$.

R: Pentru un fascicul incident care acoperă o suprafață S fără imperfecțiuni s-a stabilit că:

$$I = \frac{\tau}{1 + m\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}.$$

Imaginea sursei luminoase se formează în vecinătatea lamei de sticlă, deci se poate considera că în diferite puncte ale lamei oscilațiile radiației optice sunt necoerente. Intensitatea totală este egală cu suma intensităților oscilațiilor elementare, adică:

$$I = \frac{\tau}{S}\int_0^S \frac{1}{1 + m\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}ds.$$

Dacă suprafața este perfectă atunci diferența de fază $\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}2h\cos i$ este aceeași oricare ar fi elementul ds. Diferența de fază depinde numai de unghiul de incidență i, ceea ce determină și apariția inelelor luminoase, respectiv întunecate. Dacă suprafața S este imperfectă, atunci mărimea h variază de la un punct la altul ceeace determină o variație a mărimii h, deci:

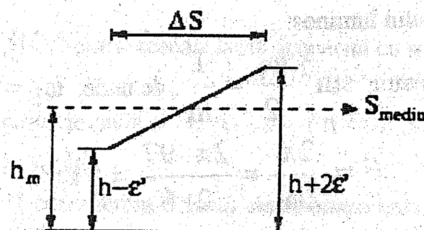


Fig. 97

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial i}di + \frac{\partial\varphi}{\partial s}ds.$$

Pentru a analiza influența imperfecțiunulor suprafeței să considerăm $i = 0$, adică să considerăm razele normale la o oarecare suprafață medie (fig. 97). Presupunem deasemenea că $f = \dfrac{\partial s}{\partial\varphi} = ct$. în interval Δs, adică grosimea h variază liniar în jurul valorii medii h_m, ceea ce determină o variație a mărimii φ în intervalul $\varphi - \varepsilon \div \varphi + \varepsilon$. Pentru această suprafață se poate scrie:

$$I(\varphi) = \frac{\tau}{\Delta s}\int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon}\frac{f}{1 + m\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}d\varphi = \frac{\tau}{2\varepsilon}\int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon}\frac{1}{1 + m\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}d\varphi,$$

deoarece: $\Delta s = f\Delta\varphi = 2\varepsilon f$.

b) Să se deducă noua valoare a contrastului C. Să se calculeze pentru $R = 0{,}9$ și $\varepsilon = 0{,}17$ rad, de câte ori contrastul real este mai mic decât cel teoretic.

R: Pentru a determina contrastul trebuie să se determine pentru cazul suprafeței imperfecte valorile I'_M și I'_m Dacă suprafeței Δs, pentru o lungime de undă λ dată, o grosime și un unghi i mic dat îi corespunde un minim de intensitate $\varphi = (2k+1)\pi$, adică $\sin^2\dfrac{\varphi}{2} \cong 1$, atunci se obține:

$$I'_m \cong \frac{\tau}{2\varepsilon}\int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon}\frac{1}{1+m}d\varphi = \frac{\tau}{1+m} = I_m,$$

prin urmare neregularitațile suprafeței influențează foarte puțin asupra valorii intensității minime transmise de interferometru.

Dacă valorii h_m (mijlocul lui Δs) îi corespunde un maxim, atunci: $\varphi = 2k\pi$, adică $\sin^2\dfrac{\varphi}{2} \cong \dfrac{\varphi^2}{4}$, deci:

$$I'_M \cong \frac{\tau}{2\varepsilon}\int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon}\frac{d\varphi}{1 + m\dfrac{\varphi^2}{4}} = \frac{\tau}{2\varepsilon}\left[\frac{2}{\sqrt{m}}\arctan\frac{\varphi\sqrt{m}}{2}\right]_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon} =$$

$$= \frac{2\tau}{\varepsilon\sqrt{m}}\arctan\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{2} \langle I_M = \tau$$

Prin urmare imperfecțiunile suprafeței influențează mult asupra valorii intensității maxime transmise de interferometru.

Contrastul:

$$C(\varepsilon)=\frac{I'_M}{I'_m}=\frac{\tau}{\frac{\tau}{1+m}}\frac{2}{\varepsilon\sqrt{m}}\arctan\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{2}=C_0\frac{\arctan\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{2}}{\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{2}}.$$

Dacă: $R=0{,}9$, atunci $m=\frac{4R}{(1-R)^2}=360$, deci:

$$C_0=1+m=361.$$

Pentru: $\varepsilon=0{,}17\,\text{rad}$, $\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{2}\cong 1{,}61$, $\arctan 1{,}61\cong 1\,\text{rad}$

$$C(\varepsilon)=361\frac{1}{\frac{0{,}17\cdot 19}{2}}=220.$$

Contrastul $C(\varepsilon)=220$ reprezintă aproximativ 60% din valoarea sa teoretică $C_0=361$.

Proprietățile generale ale unui interferometru Fabry-Perot.

Considerăm un interferometru Fabry-Perot ale cărui straturi *semi*transparente sunt caracterizate prin coeficientul de reflexie R și cel de transmisie T. Coeficientul de reflexie este definit ca raportul dintre fluxul de radiație optică reflectat și cel incident, iar coeficientul de transmisie ca raportul dintre fluxul de radiație optică transmis și cel incident. Se notează cu A coeficientul de absorbție al fiecărui strat metalic, adică raportul dintre fluxul de radiație optică absorbit în lamă și cel incident. Se neglijează alte pierderi de radiație optică. Dispozitivul este considerat dispus într-un spațiu vidat.

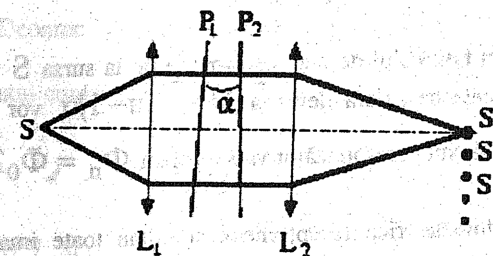


Fig. 98

1. - Se presupune pentru coeficientul de reflexie o valoare $R\cong 1$ și se realizează dispozitivul din fig. 98. O sursă punctiformă S se află în focarul lentilei L_1; în drumul razelor fasciculului paralel se află așezat interferometrul FP ușor dereglat (cele două plăci *semi*reflectante formează un unghi α mic). Lentila L_2 recepționează toate razele ce ies din interferometru și le focalizează în planul focal. Să se arate că în planul focal al lentilei L_2 se formează o serie de imagini punctuale S_1, S_2, S_3,...,

care sunt foarte apropiate dacă valoarea α este foarte mică. Notând cu Φ_0 fluxul luminos corespunzător sursei S_1 în lipsa interferometrului, să se calculeze în funcţie de Φ_0, R şi T fluxurile corespunzătoare imaginilor S_1, S_2, S_3,....

R: Intensitatea primei raze emergente este egală cu:

$$I_1 = I_0 T^2.$$

Cea de a doua rază suferă o deviaţie egală cu unghiul 2α şi două reflexii suplimentare:

$$I_2 = I_0 T^2 R^2.$$

Deviaţia celei de a treia raze este egală cu 4α, iar

$$I_3 = I_0 T^2 R^4,$$

pentru a *n*-a rază deviaţia este de $2(n-1)\alpha$, respectiv

$$I_n = I_0 T^2 R^{2(n-1)}.$$

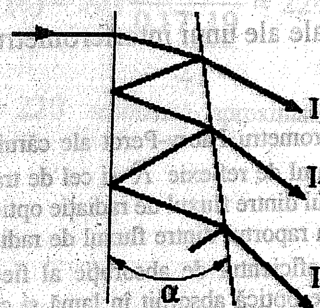


Fig. 99

Dacă considerăm fasciculul de raze ce provine de la sursa S sub forma unui fascicul paralel, toate razele ce suferă deviaţia $D = 2(n-1)\alpha$ vor fi focalizate în aceeaşi imagine S_n, iar fluxul corespunzător va fi egal cu $\Phi_n = \Phi_0 T^2 R^{2(n-1)}$.

2. - O celulă fotoelectrică recepţionează simultan toate imaginile S_1, ..., S_n,..., fluxul de radiaţie măsurat fiind egal cu Φ_1. Dacă se îndepărtează lama P_1, valoarea fluxului măsurat devine Φ_2; dacă se îndepărtează şi a doua lamă P_2 această valoare devine egală cu Φ_0. Să se calculeze factorii R, T, şi A funcţie de mărimile Φ_0, Φ_1, Φ_2.

Aplicaţie. Să se calculeze factorii R, T, şi A dacă mărimea Φ_0 este considerată egală cu 100, iar valorile fluxurilor Φ_1, Φ_2 sunt egale cu 0,21, respectiv 2.

R: Dacă celula recepţionează simultan toate imaginile, atunci:

$$\Phi_1 = \Phi_0 T^2 + \Phi_0 T^2 R^2 + \Phi_0 T^2 R^4 + \dots + \Phi_0 T^2 R^{2(n-1)} + \dots =$$

$$= \Phi_0 T^2\left(1 + R^2 + R^4 + \dots + R^{2(n-1)} + \dots\right) = \Phi_0 T^2 \frac{1}{1-R^2}$$

Dacă lipseşte lama P_1: $\Phi_2 = \Phi_0 T$, de unde: $T = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{2}{100}$.

Însă: $1 - R^2 = \frac{\Phi_0}{\Phi_1} T^2 = \frac{\Phi_0}{\Phi_1}\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_0}\right)^2$, deci: $R = 0{,}9$,

De unde: $A = 1 - (T + R) = 0{,}08$.

3. - Presupunând pentru R o valoare foarte apropiată de 1, să se calculeze numărul de ordine n al imaginii S_n căreia îi corespunde un flux de radiaţie de $e^6 \cong 400$ ori mai slsb decât fluxul primit de S_1.

Aplicaţie. Să se determine ordinul n pe baza datelor de la problema precedentă.

R: De fiecare dată când se trece la imaginea următoare fluxul de radiaţie se înmulţeşte cu R^2. Deoarece pentru o imagine oarecare n fluxul de radiaţie reprezintă $\frac{1}{e^6} \cong \frac{1}{400}$ din fluxul corespunzător lui S_1, atunci se poate scrie: $\left(R^2\right)^{n-1} = e^{-6}$,

de unde:

$$n = 1 - \frac{3}{\ln R}.$$

Dacă $R = 0{,}9$, atunci $n = 28$.

Dacă R este foarte apropiat de valoarea 1, atunci $R = 1 - \varepsilon$, iar $\ln R = -\varepsilon$, de unde: $n = 1 - \frac{3}{\varepsilon}$.

De ex.: $\varepsilon = 0{,}1$, atunci $n = 31$, iar pentru $\varepsilon = 0{,}05$, $n = 61$.

Deci pentru $R = 0{,}9$ fluxul corespunzător imaginii a 28-a este egal cu $\frac{1}{e^6}$ din fluxul recepţionat de S_1, cu alte cuvinte la interferometre are loc fenomenul de interferenţă a unui număr mare de fascicule. In aceasta constă şi cauza fineţii inelelor de interferenţă.

4. - Presupunem că etalonul Fabry-Perot este reglat precis, adică lamele P_1 şi P_2 sunt riguros paralele între ele, iar grosimea stratului de aer delimitat de aceste lame este egal cu h. Se înlătură lentila L_2. Etalonul este iluminat de o sursă S, punctiformă, monocromatică, caracterizată prin lungimea de undă λ, iar observarea figurii de interferenţă se face la infinit într-o direcţie ce face un unghi i cu normala la etalon, i fiind egal cu unghiul de incidenţă. Să se calculeze diferenţa de fază φ ce apare între unda transmisă (I_1) şi următoare undă care suferă două reflexii suplimentare pe lamele interferometrului (I_2). Să se calculeze intensitaea luminoasă $I(i)$ observată la infinit în direcţia definită de unghiul i; să se exprime această intensitate în funcţie de φ, R, T, A şi I_0, unde I_0 reprezintă intensitatea undei incidente. Se va neglija defazajul introdus la transmisia şi reflexia pe lamele interferometrului.

R: $\Delta = 2h\cos i$, deci: $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}2h\cos i \cong \frac{2\pi}{\lambda}2h\left(1-\frac{i^2}{2}\right)$

$$I(i) = \frac{I_0T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{I_0T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\left(\frac{2\pi}{2\lambda}2h\cos i\right)}$$

5. - Să se arate că raportul $\frac{I}{I_0}$ se poate scrie sub forma: $\frac{I}{I_0} = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2 A(\varphi, R)$, unde mărimea $A(\varphi, R)$ - funcţia lui Airy - nu depinde decât de parametrii φ şi R.

R: $\frac{I}{I_0} = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2 \frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2 \frac{1}{1+m\sin^2\frac{\varphi}{2}}$,

unde:

$A(\varphi, R) = \frac{1}{1+m\sin^2\frac{\varphi}{2}}$ reprezintă funcţia lui Airy, iar $m = \frac{4R}{(1-R)^2}$.

6. - Să se reprezinte grafic dependenţa funcţiei A de parametrul φ. Să se calculeze contrastul $C = \frac{A(2k\pi, R)}{A(2k\pi+\pi, R)}$ şi fineţea $F = \frac{2\pi}{\delta\varphi}$, unde $\delta\varphi$ reprezintă lăţimea la $\frac{I_M}{2}$ a curbei variaţiei mărimii A funcţie de $\delta\varphi$, porţiunea de curbă considerată fiind cuprinsă între $\varphi = (2k-1)\pi$ şi $\varphi = (2k+1)\pi$ (k - număr întreg). Să se compare expresia mărimii F cu expresia numărului n, care reprezintă numărul de raze utile.

R: Valoarea funcţiei $A(\varphi, R)$ devine maximă $A_M = 1$, pentru $\varphi = 2k\pi$, respectiv minimă $A_M = \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2$, pentru: $\varphi = (2k\pm 1)\pi$.

Semilăţimea: $A = \frac{A_M}{2}$, pentru: $\sin^2\frac{\varphi_1}{2} = \frac{(1-R)^2}{4R}$.

$\varphi_1 = \frac{1-R}{\sqrt{R}}$, de unde: $\delta\varphi = 2\varphi_1 = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$.

Pentru: $R = 0{,}8$, $A = \frac{1}{1+80\sin^2\frac{\varphi}{2}}$,

de unde: $A_m = \frac{1}{81}$, iar $A(60^o) = \frac{1}{21}$, $\varphi_1 \cong 13^o$

Pentru: $R = 0{,}9$, $A = \frac{1}{1+360\sin^2\frac{\varphi}{2}}$,

de unde: $A_m = \frac{1}{361}$, iar $A(60^o) = \frac{1}{91}$, $\varphi_1 \cong 6^o$

Contrastul: $C = \frac{A_M}{A_m} = \left(\frac{1+R}{1-R}\right)^2$, $R = 0{,}8$, $C = 81$

$R = 0{,}9$, $C = 361$.

Finețea: $F = \frac{2\pi}{\delta\varphi} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$,

$R = 0{,}8$	0,9	0,95
$F = 14$	29,9	61

$$n = 1 + \frac{3}{1-R} = 16 \to 31 \to 61.$$

Deci dacă valoarea lui R este apropiată de 1, pentru n și F se vor obține valori numerice foarte apropiate. Prin urmare odată cu creștere mărimii R, numărul de reflexii devine din ce în ce mai mare, iar inelele luminoase devin din ce în ce mai înguste (fig. 100).

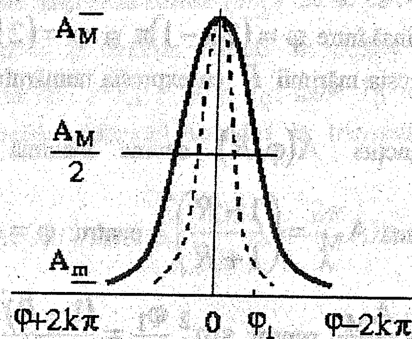


Fig. 100

7. - Interferometrul este iluminat de o sursă S', care nu îndeplinește condiția de sursă punctiformă. Cum se modifică figura de interferență?

R: Dacă sursa este punctiformă atunci fiecare punct S al sursei S' dă propriul său sistem de inele și, deoarece toate aceste surse punctiforme sunt necoerente, în fiecare punct al câmpului se vor aduna iluminările. Inelele se lărgesc, iar finețea inelelor dispare.

8. - Considerând intervalul etalonului $h = 1\,cm$ și $\lambda = 500\,nm$ să se calculeze ordinul de interferență la centru și unghiul de incidență corespunzător inelelor luminoase.

R: $k_0 = \frac{2h}{\lambda} = 40000$,

Inelele luminoase: $2h\left(1 - \frac{i_k^{\,2}}{2}\right) = k\lambda$, deci: $1 - \frac{i_k^{\,2}}{2} = \frac{k}{k_0}$,

$$i_k = \sqrt{\frac{2}{k_0}}\sqrt{k_0 - k} = \frac{1}{200}\sqrt{2p}.$$

Proprietățile spațiului situat în interiorul interferometrului

Un interferometru Fabry-Perot, reglat precis, distanța dintre lame fiind egală cu h, este iluminat sub unghiul de incidență i cu o undă luminoasă plană, monocromatică cu lungimea de undă λ. Intr-un punct P situat în spațiul dintre lame, la o distanță z de lama P_2 se întâlnesc două serii de raze: seria $A(a_1, a_2, \cdots)$ și seria $B(b_1, b_2, \cdots)$.

1. - Să se calculeze intensitatea totală a^2 și b^2 produsă în punctul P de razele seriei A și B.

R: Considerăm lamele P_1 și P_2 foarte subțiri, astfel încât razele trec nedeviate (fig. 101). Amplitudinele: a_1, a_2, a_3, a_4, sunt: $a_0 t$, $a_0 tr^2$, $a_0 tr^4$, $a_0 tr^6$,..., unde: $t = \sqrt{T}$ și $t = \sqrt{R}$.

Sumarea acestor amplitudini considerând defazajul lor conduce la amplitudinea complexă:

$$a_0 t\left(1 + r^2 e^{-i\varphi} + r^4 e^{-2i\varphi} + \ldots\right) = \frac{a_0 t}{1 - r^2 e^{-i\varphi}},$$

de unde se poate calcula expresia intensității:

$$a^2 = \frac{I_0 T}{1 + R^2 - 2R\cos\varphi} = I_0 \frac{T}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + m\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

unde: $$m = \frac{4R}{(1-R)^2}.$$

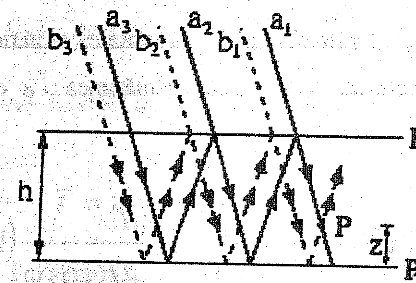


Fig. 101

La fel pentru cel de al doilea fascicul, care prezintă o reflexie în plus:

Amplitudinele: b_1, b_2, b_3, b_4,

$a_0 tr$, $a_0 tr^3$, $a_0 tr^5$, $a_0 tr^7$

$$b^2 = \frac{I_0 TR}{1 + R^2 - 2R\cos\varphi} = R a^2, \text{ unde: } \varphi = \frac{4\pi h\cos i}{\lambda}.$$

2. - Să se evalueze, în punctul P, diferența de fază ψ ce apare între câmpurile fasciculelor a și b; se va exprima mărimea ψ funcție de λ, i și z.

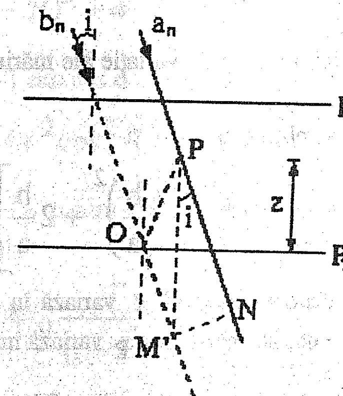


Fig. 102

R: Din fig. 102 rezultă: $OM' = OP$. Diferența de drum între razele a_n și b_n este:

$$\Delta = PH = 2z\cos i \text{, deci: } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}2z\cos i \text{ sau } \psi\,?.$$

3. - Să se calculeze în punctul P intensitatea radiației totale I_0; să se arate că dacă nu se modifică valorile λ și i, atunci mărimea I_P este constantă într-un plan paralel cu P_2.

R:

$$I_P = a^2 + b^2 + 2ab\cos\psi = \frac{I_0 T}{1+R^2-2R\cos\varphi}\left(1+R+2\sqrt{R}\cos\varphi\right).$$

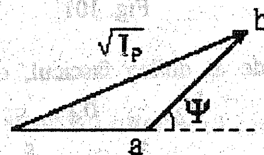


Fig. 103

Deoarece $\psi = \frac{2\pi}{\lambda}2z\cos i$, unde mărimile λ și i sunt constante, atunci într-un plan paralel cu P_2 este îndeplinită condiția $z = ct$, deci intensitatea totală rezultantă $I_P = ct$ (fig. 103).

4. - Să se stabilească limitele de variație ale mărimii I_P atunci când variază mărimea z?

R: Pentru $z = 0$ se obține $\psi = 0$ și

$$I_P = a^2 + b^2 + 2ab = a^2\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\frac{b}{a}\right] = a^2\left(1+\sqrt{R}\right)^2.$$

Rezultă că atunci când parametrul z variază în domeniul $0 \div h$, defazajul ψ variază în domeniul $0 \div \varphi$, iar mărimea I_P variază între valoarea maximă:

$$I_{P_M} = a^2\left(1+\sqrt{R}\right)^2 \text{, dacă } \Delta = 2z\cos i = k\lambda$$

și valoarea mininmă:

$$I_{P_m} = a^2\left(1-\sqrt{R}\right)^2 \text{, dacă } \Delta = 2z\cos i = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

5. - Să se arate că dacă $R \cong 1$, valoarea uneia din limitele de variație ale mărimii I_P este neglijabilă față de cealaltă, condiție admisă în toată problema. In aceste condiții, să se scrie legea de variație a mărimii I_P funcție de parametrul z. Această lege se va exprima funcție de R, ψ, $\varphi = \frac{4h\pi\cos i}{\lambda}$, presupunând coeficientul de absorție $A = 0$.

Aplicație. $R = 0{,}95$; $T = 0{,}05$ și $A = 0$.

R: Dacă $R \cong 1$ se poate scrie: $\sqrt{R} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, prin urmare:

$$I_{P_M} = a^2\left(2-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \cong 4a^2\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{, iar}$$

$$I_{P_m} = \frac{a^2\varepsilon^2}{4}$$ (valoare care este neglijabilă față de mărimea $4a^2$).

$$I_P = a^2 + b^2 + 2ab\cos\psi = a^2 + Ra^2 + 2a^2\sqrt{R}\cos\psi =$$

Deci:

$$= a^2\left[1+R+2\sqrt{R}\left(2\cos^2\frac{\psi}{2}-1\right)\right] =$$

$$= a^2\left[(1-R)^2 + 4\sqrt{R}\cos^2\frac{\psi}{2}\right] \cong 4a^2\sqrt{R}\cos^2\frac{\psi}{2}$$

deoarece $R \cong 1$. (Dacă s-ar fi compus două vibrații cu amplitudinea a și diferența de fază ψ s-ar fi obținut $I_P = 4a^2\cos^2\frac{\psi}{2}$).

Mărimea intensității I_P pentru valori date h, i și λ depinde de parametrul z prin intermediul mărimii ψ:

$$I_P \cong 4a^2\sqrt{R}\cos^2\frac{\psi}{2} = 4I_0\frac{T}{(1-R)^2}\frac{1}{1+m\sin^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{R}\cos^2\frac{2\pi}{2\lambda}2z\cos i$$

Dacă lipsește absorbția ($T = 1 - R$), atunci:

$$I_P = 4I_0\frac{\sqrt{R}}{1-R}\frac{1}{1+m\sin^2\frac{\varphi}{2}}\cos^2\frac{\psi}{2}.$$

Pentru $R = 0{,}95$ se obține: $I_P = I_0 \dfrac{78}{1+1520\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}\cos^2\dfrac{\psi}{2}$.

Distribuția intensității în spațiul dintre plăci, pentru valori constante ale parametrilor h, i și λ, funcție de z are aspectul din fig. 104. Intensitatea I_P are valori diferite pentru unghiuri de incidență (i) diferite. Astfel pentru $\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda} 2h\cos i = 2k\pi$ $\left(\cos i = \dfrac{k\lambda}{2h}\right)$ se obține $I_P = I_M$, iar pentru $\cos i = \dfrac{\lambda}{2h}(2k+1)$ se obține $I_P = I_m$.

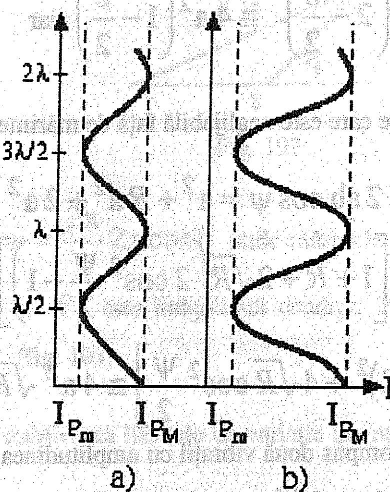


Fig. 104

a) unghi de incidență i_1; b) $i_1 \neq i_2$

6. - Să se calculeze raportul ρ al energiilor cuprinse în același volum V (ale cărui dimensiuni sunt mari în raport cu λ) dispus în interiorul etalonului și în exteriorul acestuia (în unda incidentă). Să se analizeze variația acestui raport funcție de i. Se va considera $R = 0{,}95$; $T = 0{,}05$ și $A = 0$.

R: Atât în interiorul etalonului cât și în exteriorul acestuia densitatea de energie este proporțională cu intensitatea luminoasă, deci:

$$\rho = \frac{I_P}{I_0} = \frac{78}{1+1520\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}\cos^2\frac{\psi}{2}.$$

Densitatea de energie ρ este maximă pentru $\sin\varphi = 0$, adică $\cos i = \dfrac{k\lambda}{2h}$, iar pentru poziția $z = k\lambda$ se obține:

$$\rho_M = 78.$$

In interiorul etalonului, pentru o incidență dată, apar alternări de maxime și minime, ceea ce corespunde la un sistem de unde staționare. In realitate cele două unde plane care se propagă în sens invers în interiorul etalonului nu au aceeași amplitudine (o undă suferă o reflexie în plus); în afară de aceasta o parte din energia din cavitate este transmisă în exterior.

De ex.: pentru $z = 0$, deci $\psi = 0$, se obține: $a^2 - b^2 = a^2(1-R) = a^2 T$. Pentru a calcula energia din volumul V ale cărui dimensiuni sunt mari în fața de λ, este necesar să se considere valoarea medie a densității ρ.(unghiul de incidență $i = ct$).

De ex.: $\rho = \rho_M \cos^2\dfrac{\psi}{2}$., deci:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho_M \cos^2\frac{\psi}{2} d\psi = \frac{\rho_M}{2} = 39.$$

Etalonul Fabry-Perot

Se consideră un etalon Fabry-Perot constituit din două plăci de sticlă P şi P' *semi*argintate şi separate prin trei tije de sticlă AA', BB' şi CC' a căror lungime este egală cu aprox. $50\,mm$, una din ele fiind cu câţiva microni mai lungă. Extremităţile A, B şi C formează un triunghi echilateral înscris într-o circumferinţă de diametru egal cu $130\,mm$. La fel şi punctele A', B' şi C'. Etalonul este astfel aşezat încât tijele BB' şi CC' se află într-un plan orizontal.

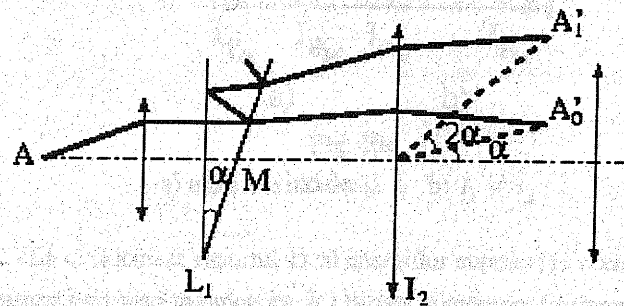


Fig. 105

1. - Trebuie să se măsoare unghiul dintre planele P şi P'. Pentru aceasta etalonul se iluminează cu lumină albă dată de un colimator a cărui lentilă convergentă are $f = 2\,m$. Lumina transmisă de etalon se observă cu o lunetă reglată pentru infint. Se constată că dacă fanta colimatorului este verticală, imaginile acesteia sunt situate pe aceeaşi verticală; dacă fanta este aşezată orizontal atunci apar o serie de imagini paralele între ele a căror intensitate scade de jos în sus, ceea ce arată că planurile P şi P' fac un unghi între ele. Lărgind fanta colimatorului până la valoarea de $115\mu m$, imaginile fantei se ating între ele. Să se deducă unghiul dintre P şi P'. Care tijă este mai lungă? Cu cât este mai lungă faţă de celelalte tije?

R: Facem la început observaţia că dacă un fascicul de raze paralele traversează o lamă transparentă cu feţele plan paralele, acesta nu-şi schimbă direcţia oricare ar fi unghiul de incidenţă, ci numai suferă o deplasare. In montajul de mai sus placa P' este rotită cu un unghi α în jurul unei drepte (M) perpendiculară la fig. 105. Punctului A îi corespund imaginile A'_0, A'_1, A'_2, separate de un interval unghiular 2α şi care sunt din ce în ce mai puţin intense. In locul punctului A să fixăm o fantă mobilă şi de lărgime variabilă. Dacă fanta F este perpendiculară la dreapta M, atunci imaginea acesteia va fi alungită de suprapunerea reflexiilor multiple. Dacă fanta F este paralelă cu dreapta M atunci vor apare o serie de imagini F'_0, F'_1, F'_2, iluminate din ce în ce mai slab şi dispuse la distanţe egale. Dacă lărgim fanta atunci imaginile ei se lărgesc; pentru o anumită lărgime a fantei acestea se ating. In acest caz unghiul 2α dintre imaginile A'_0 şi A'_1 este egal cu unghiul sub care se vede fanta din centrul optic al lentilei colimator (fig. 106).

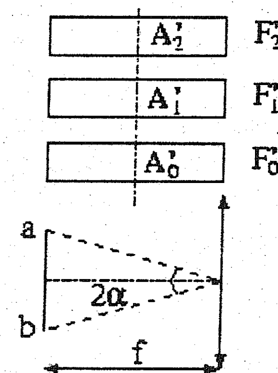


Fig. 106

Deci: $2\alpha f = ab = 115 \cdot 10^{-3}\ mm$, de unde:

$$\alpha = \frac{115 \cdot 10^{-3}\ mm}{4 \cdot 10^{-3}\ mm} = 28{,}75 \cdot 10^{-3}\ rad.$$

Deoarece dreapta M este orizontală şi perpendiculară la fig. 105, iar deplasarea imaginilor apare în plan vertical rezultă că tija $AA' \rangle BB' = CC'$. Din fig.

107 rezultă că $AM = \frac{3D}{4}$, unde D reprezintă diametrul cercului circumscris. Prin urmare:

$$AA' - BB' = \alpha\, AM = \alpha \frac{3D}{4} = 2{,}8 \mu\, m.$$

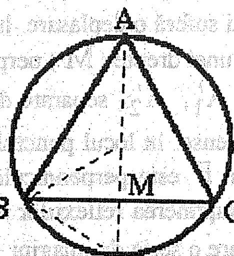


Fig. 107

2. - Se egalează lungimea tijelor, deci lamele P şi P' devin paralele. Se iluminează etalonul cu radiaţie monocromatică ($\lambda = 630\,nm$) şi se observă inelele de interferenţă. Considerând că indicele de refracţie al aerului (n) variază cu masa specifică ρ conform legii lui Gladstone $\frac{n-1}{\rho} = ct$, să se calculeze variaţia ordinul de interferenţă în centrul inelelor dacă presiunea atmosferică variază cu $1\,mm\,col\,Hg$, temperatura fiind constantă. In condiţii normale valoarea indicelui de refracţie al aerului, egală cu $1{,}0003$.

R: Inelele luminoase apar pentru: $\Delta = 2nh\cos i + \lambda$ ordinul de interferenţă: $k = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2nh\cos i}{\lambda} + 1$, de unde:

$$\frac{dk}{k-1} = \frac{dn}{n} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial p} dp \text{ (pentru centru).}$$

Fentru $1\,g$ de gaz perfect se poate scrie:

$$pV = \frac{p}{\rho} = RT \text{, de unde: } \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} \text{ sau:}$$

$$\frac{dn}{n-1} = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} \text{ (pentru } T = ct\text{).}$$

Deci.

$$dk = \frac{2h}{\lambda}(n-1)\frac{dp}{p} = \frac{2 \cdot 50\,mm}{0{,}63 \cdot 10^{-3}\,mm} \cdot 3 \cdot 10^{-4}\, \frac{1\,tor}{760\,tor} = 0{,}0627.$$

3. - Considerând coeficientul de dilatare liniară al tijelor egal cu $0{,}35 \cdot 10^{-6}$, să se calculeze variaţia temperaturii care ar determina aceeaşi variaţie a ordinului de interferenţă.

R: Deoarece $k - 1 = \frac{2nh}{\lambda}$ se obţine:

$$\frac{dk}{k-1} = \frac{dn}{n} + \frac{dh}{h} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial T} dT + \frac{dh}{h} \text{, unde: } \frac{dh}{h} = \alpha\, dT.$$

Variaţia ordinului k determinată de variaţia temperaturii trebuie să fie egală cu variaţia determinată de modificarea presiunii, adică:

$$-\frac{n-1}{n}\frac{dT}{T} + \alpha\, dT = \frac{n-1}{n}\frac{dp}{p},$$

de unde:

$$dT = \frac{(n-1)\frac{dp}{p}}{\alpha n - \frac{n-1}{T}}.$$

Dacă $T = 300\,K$ se obţine: $dT = -0{,}607\,K$, iar dacă $T = 273\,K$ se obţine: $dT = -0{,}526\,K$

Contrast de fază

Se consideră două lame de sticlă L_1 şi L_2 cu feţele plan-paralele. Suprafeţele A_1B_1 şi A_2B_2 sunt paralele între ele, *semi*reflectante şi prezintă acelaşi coeficient de transmisie (T) şi de reflexie (R). Distanţa dintre suprafeţe este h, iar indicele de refracţie al mediului dintre acestea este n. Sistemul este iluminat cu radiaţie monocromatică de lungime de undă λ. Ochiul observatorului este aşezat în focarul obiectivului O, care îi permite să-şi acomodeze ochiul, la fel ca în cazul unei lupe, într-un plan AB oarecare situat între A_1B_1 şi A_2B_2. Deoarece imaginea sursei se formează pe pupila ochiului, iar planul A_1B_1 este paralel cu A_2B_2, planul AB apare uniform iluminat.

1. - Menţinând paralelismul dintre planele A_1B_1 şi A_2B_2 se variază distanţa h (fig. 108). Să se stabilească legea de variaţie a iluminării E a câmpului în funcţie de distanţa h. Să se traseze curba ce reprezintă această variaţie.

R: Diferenţa de drum între cele două raze transmise succesiv este: $\Delta = 2nh\cos i$, iar diferenţa de fază: $\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta = \dfrac{4\pi nh\cos i}{\lambda}$.

Deoarece T şi R reprezintă coeficienţii de transmisie şi de reflexie pentru intensitate, aceeaşi coeficienţi pentru amplitudine vor fi: $t = \sqrt{T}$ şi $r = \sqrt{R}$. In focarul lentilei se vor compune o infinitate de oscilaţii a căror amplitudine scade în progresie geometrică, iar faza în progresie aritmetică:

$$A = T\left(1 + Re^{-i\varphi} + \cdots R^n e^{-in\varphi} + \cdots\right) = \frac{T}{1 - Re^{-i\varphi}},\ \text{de unde:}$$

$$I = A^2 = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R\cos\varphi}.$$

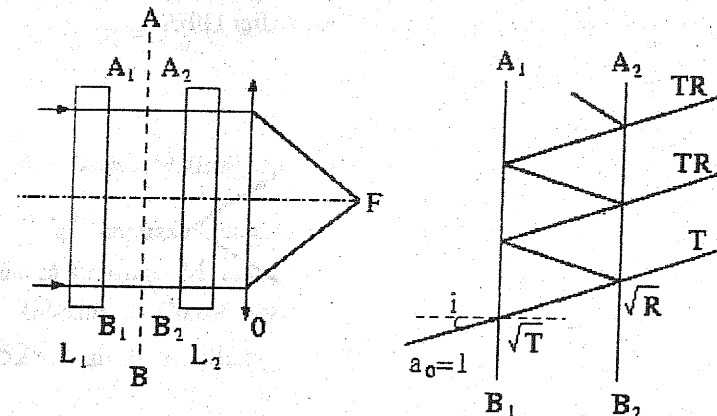


Fig. 108

In acest caz, deoarece incidenţa este normală, iluminarea maximă a câmpului se obţine pentru $\Delta = 2nh = k\lambda$ sau $\varphi = 2k\pi$, deci (fig. 109):

$$E_0 = \frac{T^2}{(1-R)^2} \text{ şi } E = E_0\frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R\cos\varphi}.$$

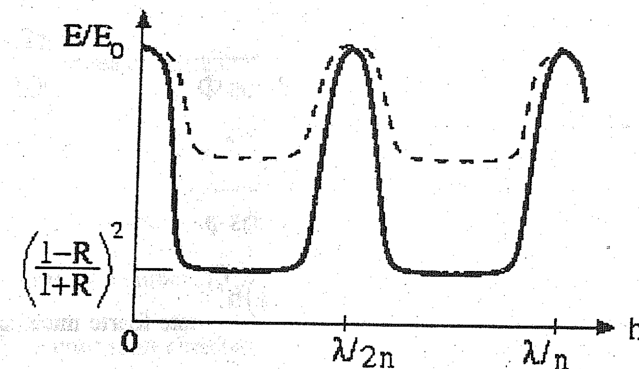


Fig. 109

Cu cât coeficientul de reflexie R este mai mare cu atât franjele sunt mai fine.

2. - Considerând o valoare fixă a mărimii h, se introduce un obiect transparent M caracterizat prin indicele de refracție n′ între lamele L_1 și L_2. Acesta este o lamă mică și subțire cu fețe plan-paralele de grosime h′, așezată în așa fel încât fețele ei sunt paralele cu A_1B_1 și A_2B_2. Ochiul observatorului este pus la punct în planul obiectului M. Să se explice de ce iluminarea E' în domeniul ocupat de lamă este diferită de cea a câmpului ce o înconjoară (fig. 110).

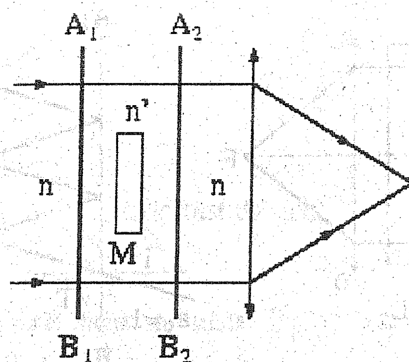


Fig. 110

R: Razele ce traversează lama suferă o întârziere suplimentară:

$$\Delta = 2(n'-n)h' \text{ sau } \varphi' = \frac{4\pi(n'-n)h'}{\lambda},$$

deci diferența de fază totală este: $\Phi = \varphi + \varphi'$. Această diferență suplimentară de fază face ca iluminarea în domeniul ocupat de lama M:

$$E' = E_0 \frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos\Phi}$$

să fie diferită de iluminarea domeniului înconjurător:

$$E = E_0 \frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos\varphi}.$$

3. - Admițând că valoarea $\varphi' = \frac{4\pi(n'-n)h'}{\lambda}$ este foarte mică, să se arate că iluminarea E' are forma $E' = a + b\varphi'$, unde a și b sunt mărimi constante.

R: Considerăm că unghiul φ variază cu $d\varphi = \varphi'$, de unde:

$$\cos(\varphi+\varphi') \cong \cos\varphi - \varphi'\sin\varphi.$$

Prin urmare:

$$E' = E_0 \frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos\varphi+2R\varphi'\sin\varphi} = E_0\frac{1}{1+B\varphi'}, \text{ sau}$$

$$E' \propto E_0(1-B\varphi') = a + b\varphi', \text{ unde:}$$

$$a = E_0 \text{ și } b = -BE_0 = -\frac{2RE_0\sin\varphi}{1+R^2-2R\cos\varphi}.$$

4. - Dacă se definește contrastul $\gamma = \frac{E-E'}{E}$, să se calculeze în funcție de R, φ și φ' contrastul obiectului M în raport cu câmpul ce-l înconjoară. Se presupune că domeniul M este mai puțin luminos decât restul câmpului.

Aplicație. Considerăm $R = 0{,}8$, $h' = 15\mu m$, $\lambda = 600\,nm$, $n = 1{,}5262$ și $n' = 1{,}5260$, iar valoarea mărimii φ este în așa fel încât $\sin\varphi = 1$. Să se stabilească valoare mărimii funcție de φ', E și derivata $\frac{dE}{d\varphi}$.

R: $$\gamma = \frac{E-E'}{E} = B\varphi' = \frac{2R\sin\varphi}{1+R^2-2R\cos\varphi}\varphi'.$$

Pentru $h' = 15\mu m$, $\lambda = 600\,nm$, $n = 1{,}5262$ și $n' = 1{,}5260$, se obține:

$$\varphi' = \frac{4\pi h'\Delta n}{\lambda} = 2\pi\cdot 10^{-2}; \ \sin\varphi = 1 \text{ deci: } \varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ și } R = 0{,}8,$$

deci: $\gamma = \frac{2\pi}{100}$ ceea ce reprezintă aprox. 6%.

$$\gamma = \frac{E-E'}{E} = \frac{dE}{E} = \frac{1}{E}\frac{dE}{d\varphi}\varphi'.$$

5. - Pe baza curbei $f(\varphi) = \frac{dE}{E} = \frac{1}{E}\frac{dE}{d\varphi}$ să se determine valoarea mărimii φ pentru care contrastul obiectului M este maxim. Să se determine valoarea maximă a contrastului funcție de R și φ, considerând valorile date la punctul 4.

R: Pentru o valoare φ' dată, contrastul $\gamma = \frac{E - E'}{E} = f(\varphi)\varphi' = B\varphi'$ este maxim pentru acea valoare φ pentru care funcția $f(\varphi) = \frac{1}{E}\frac{dE}{d\varphi} = B$ prezintă un maximum. Să calculăm maximul funcției:

$$\frac{\gamma}{\varphi'} = \frac{2R\sin\varphi}{1 + R^2 - 2R\cos\varphi} = \frac{2R\sin\varphi}{D},$$

calculând derivata în raport cu φ:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\gamma}{\varphi'}\right) = \frac{D\,2R\cos\varphi - (2R\sin\varphi)(2R\sin\varphi)}{D^2} = 0, \text{ dacă:}$$

$$D\cos\varphi = 2R\sin^2\varphi, \text{ de unde: } \cos\varphi = \frac{2R}{1+R^2}.$$

Pentru $R = 0{,}8$ se obține: $\cos\varphi = \frac{1{,}6}{1{,}64} \cong 1$, de unde:

$$\frac{\gamma_M}{\varphi'} = \frac{2R(1-R^2)}{(1+R^2)\left[1 + R^2 - \frac{2R}{(1-R^2)}\right]} = \frac{2R}{1-R^2},$$

iar pentru $R = 0{,}8$ se obține: $\gamma_M = \frac{1{,}6}{0{,}36} \cdot 2\pi \cdot 10^{-2} = 0{,}28$.

Lame subțiri *anti*reflectante.

Pe una din fețele unei lame de sticlă a cărei indice de refracție este $N = 1{,}50$ este depus un strat de grosime h de substanță transparentă a cărui indice de refracție este $n = 1{,}25$. Coeficientul de reflexie a celor două fețe ale stratului subțire obținut prin depunere are aceeași valoare. Sistemul se iluminează cu lumină albă sub incidență normală (fig. 111).

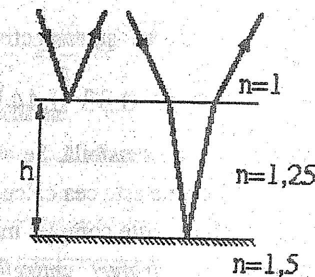


Fig. 111

1. - Să se calculeze grosimile h_1, h_2, h_3,... pentru care radiația galbenă cu $\lambda = 550\,\text{nm}$ nu este reflectată. Care este structura spectrală a radiației reflectate pentru cea mai mică valoare h_1 a stratului?

R: Sub incidență normală coeficientul de reflexie este dat de relația:

$R=\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2=r^2$. Reflexia pe suprafața aer/substanță: $r_1=0{,}012$, deci $R_1=\frac{1}{81}=0{,}012$. Deci $1{,}2\%$ din energia incidentă este reflectată de prima suprafață, iar $\Delta\varphi=\pi$ (se introduce, din cauza reflexiei, o diferență de drum $\frac{\lambda}{2}$).

Reflexia pe suprafața substanță/sticlă: $r_2=\frac{1}{9}$, deci $R_2=\frac{1}{121}=0{,}0083$ adică $0{,}83\%$ din energia incidentă este reflectată de suprafața a doua, iar $\Delta\varphi=\pi$. Deoarece foarte puțină energie este reflectată chiar la prima reflexie, nu mai este necesar să considerăm reflexiile multiple.

Interferența a două raze, una reflectată pe prima suprafață cealaltă pe a doua, care au aproape aceeași amplitudine va da un minim, a cărui valoare este aproape egală cu zero, dacă:

$$\Delta=2nh.$$

Radiația cu lungimea de undă λ_0 va fi stinsă prin interferență, dacă:

$$\Delta=2nh=(2k+1)\frac{\lambda_0}{2}\ \text{sau}\ h=(2k+1)\frac{\lambda_0}{4n}=(2k+1)h_1.$$

Deci: $h_1=\frac{\lambda_0}{4n}=\frac{0{,}55}{5}=0{,}11\mu m$ și, respectiv:

$$h_{1,2,3,4}=(0{,}11;0{,}22;0{,}33;0{,}44)\mu m.$$

Grosimea h_1 reprezintă prima tentă sensibilă. Se observă că dacă suprafața de sticlă este acoperită cu un strat a cărui grosime este cea calculată mai sus, atunci radiația cu λ_0 este reflectată foarte puțin, în schimb este complet transmisă prin lama de sticlă. Asemenea straturi poartă denumirea de *straturi antireflectante*. Sunt utilizate în aparatele optice, la acoperirea lentilelor, pentru a micșora lumina reflectată, prin urmare pentru a crește luminozitatea aparatului.

2. - Să se calculeze, pentru grosimea h_3, lungimile de undă ale radiațiilor ce nu sunt reflectate și a celor ce sunt cel mai puternic reflectate.

R: Dacă stratul are grosimea h_3, după cum s-a stabilit mai sus, radiația cu lungime de undă λ_0 este aproape complet stinsă în schimb alte lungimi de undă sunt reflectate foarte puternic. $h=h_3$, deci:

$$\Delta=(2k+1)\frac{\lambda_0}{2}=p\frac{\lambda_0}{2}=\frac{5}{2}\lambda_0=1{,}375\mu m.$$

Pentru această diferență de drum numărul p pentru radiația violetă și roșie va fi:

$\lambda_v=400\,nm$, $\quad p_v=\frac{1{,}375}{0{,}4}=3{,}43$.

$\lambda_r=800\,nm$, $\quad p_r=\frac{1{,}375}{0{,}8}=1{,}73$.

Radiația $\lambda_0=550\,nm$ va stinsă pentru $p=2{,}5$, iar pentru $p=1{,}5$ și $p=3{,}5$ vor stinse radiațiile:

$$\Delta=p\frac{\lambda}{2}=(2k+1)\frac{\lambda}{2}=1{,}375\mu m,\ k=1,\ (p=1{,}5),\ \text{deci:}$$

$$\lambda=\frac{\Delta}{2k+1}=\frac{1{,}375}{1{,}5}=0{,}9166\mu m\ \text{și}\ k=3,\ (p=3{,}5),\ \lambda=0{,}3928\mu m.$$

Pentru $p=2k\frac{\lambda}{2}=2$, respectiv 3 vor fi reflectate puternic radiațiile cu:

$$\Delta=2k\frac{\lambda_1}{2},\ \text{deci: }\lambda_1=\frac{\Delta}{k}=\frac{1{,}375}{2}=0{,}6875\mu m,$$

$$\text{respectiv: }\lambda_2=\frac{\Delta}{k}=\frac{1{,}375}{3}=0{,}4583\mu m.$$

Se obține următoarea situație:

Reflexie zero	0,9166			0,55			0,3928
k	1			2			3
p	1,5	1,73	2	2,5	3	3,43	3,5
Reflexie intensă			0,6875		0,4583		
Reflexie intermediară		0,8				0,4	

3. - Să considerăm grosimea h_5. Care este structura spectrală a radiației reflectate? Să se caracterizeze numeric fenomenul observat. Ce se observă dacă se variază unghiul de incidență pe lamă al radiației incidente.

R: Să considerăm mai întâi cazul $(h = h_1)$. În aceste condiții radiația $\lambda_0 = 550\,\text{nm}$ este reflectată cel mai puțin (amplitudinile celor două raze ce interferă sunt aproximativ egale). Diferența de drum optic:

$$\Delta = \frac{\lambda_0}{2} = \frac{550}{2} = 275\,\text{nm}.$$

Să calculăm intensitatea radiației reflectate de același strat la altă lungime de undă. Deoarece (fig. 112):

$$I = A^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 \cos\varphi = 2a^2(1+\cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$(a_1 \cong a_2 = a),$$

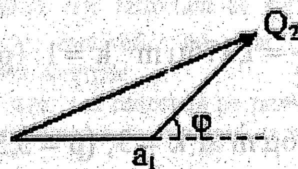


Fig. 112

se obține: $\dfrac{I}{I_0} = \cos^2\dfrac{2\pi}{2\lambda}\Delta = \cos^2\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\lambda_0}{\lambda}$, deoarece: $\Delta = \dfrac{\lambda_0}{2}$.

Pentru $\lambda_V = 400\,\text{nm}$, se obține: $\dfrac{I}{I_0} = \cos^2\dfrac{\pi}{2}\dfrac{550}{400} \cong 0{,}30$,

iar pentru $\lambda_R = 800\,\text{nm}$, se obține: $\dfrac{I}{I_0} \cong 0{,}22$.

Reflexia maximă se obține pentru: $\Delta = 2nh_1 = 2k\dfrac{\lambda}{2} = 275\,\text{nm}$ $(k = 1)$, adică pentru $\lambda = 275\,\text{nm}$. În domeniul lungimilor de undă mai mari de $800\,\text{nm}$, pentru această grosime a stratului, nu se poate obține o reflexie maximă. Distribuția intensității luminii reflectate este prezentată în fig. 113. Dacă lumina este albă, iar unghiul de incidență este egal cu zero, atunci lumina reflectată de o lamă de sticlă acoperită cu un strat reflectant de grosime h_1, analizată la spectroscop, prezintă un spectru ce are la $\lambda = 550\,\text{nm}$ un canel negru, iar spre margini intensitatea crește progresiv.

Să considerăm $h = h_5$, deci: $\Delta = \dfrac{9}{2}\lambda_0 = 2{,}475\,\mu\text{m}$.

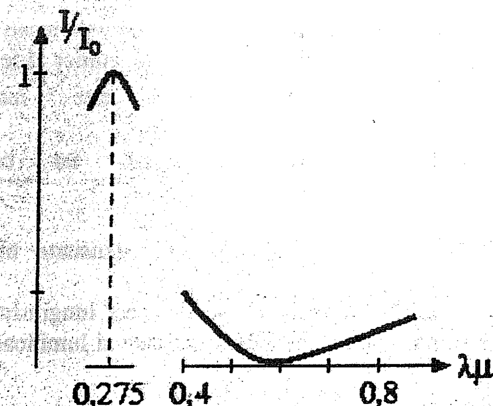


Fig. 113

Pentru $\lambda_V = 400\,\text{nm}$, se obține:

$$p_V = \frac{2{,}475\,\mu\text{m}}{0{,}4\,\mu\text{m}} = 6{,}187 \text{ și } \frac{I}{I_0} = \cos^2 6{,}187\pi$$

iar pentru $\lambda_R = 800\,\text{nm}$, se obține: $p_R = 3{,}093$ și

$$\frac{I}{I_0} = \cos^2\frac{\pi}{\lambda}\Delta = \cos^2\frac{9\pi}{2}\frac{\lambda_0}{\lambda} = \cos^2\frac{9\pi}{2}\frac{0{,}55}{0{,}8} = \cos^2 3{,}093\pi.$$

Dacă spectrul radiației cuprinsă între λ_R și λ_V, reflectat de această lamă $(i \cong 0)$, este analizat la spectroscop se obține următoarea distribuție a intensității:

Reflexie zero			0,7071		0,55
k			3		4
p		3,093	3,5	4	4,5
Reflexie intensă	0,825			0,6187	
Reflexie intermediară		0,8			

Reflexie zero		0,45			0,3807
k		5			6
p	5	5,5	6	6,187	6,5
Reflexie intensă	0,495		0,4125		
Reflexie intermediară				0,4	

In aceste condiţii spectrul prezintă 3 caneluri întunecate (fig. 114). Dacă se variază unghiul de incidenţă al radiaţiei pe lamă, atunci diferenţa de drum este $\Delta = 2\,\mathrm{nh}\cos r$. Radiaţiile pentru care este îndeplinită condiţia: $\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2} = 2\,\mathrm{nh}\cos r$ vor fi stinse, iar cele pentru care: $\Delta = 2k\frac{\lambda}{2} = 2\,\mathrm{nh}\cos r$ vor fi reflectate cu intensitate maximă. Dacă creşte valoarea unghiului r, atunci valoarea Δ scade, deci lungimea de undă a radiaţiei stinse se micşorează. Prin urmare canelurile întunecate şi luminoase se deplasează spre ultraviolet.

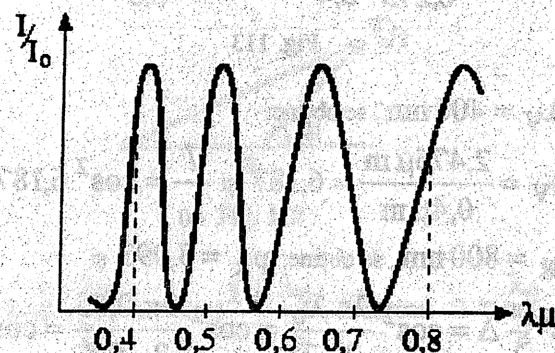


Fig. 114

4. - Cum se vor modifica răspunsurile la problemele precedente dacă indicele de refracţie al lamei subţiri (n) va fi superior indicelui lamei de sticlă (N) (în loc să fie inferior cum s-a presupus mai sus).

R: Atâta timp cât $n < N$, grosimile h_1, h_2, h_3,... se micşorează când n creşte. Dacă $n > N$, atunci reflexia pe suprafaţa lamă/sticlă se face fără schimbare de fază. Prin urmare va avea loc o permutare a canelurilor întunecate cu cele luminoase, adică aspectul spectrului va fi înlocuit cu unul complimentar.

In ceea ce priveşte intensitatea fasciculelor reflectate pe prima şi a doua suprafaţă, dacă n creşte apar următoarele modificări:

$r_1 = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$, cu creşterea lui n, creşte valoarea r_1;

$r_2 = \frac{N-n}{N+n}$, cu creşterea lui n, la început r_2 scade, se anulează pentru ($n = N$) şi apoi creşte.

Deoarece în aparatele optice este necesar ca intensitatea radiaţiei reflectate pe suprafeţele optice să fie cât mai mică, valoarea celor doi indici de refracţie trebuie să se afle într-un raport bine determinat pentru ca mărimea intensităţii celor două fascicule reflectate să fie cât mai apropiată.

Filtre interferențiale

Un filtru interferențial este constituit dintr-o lamă de substanță transparentă cu indicele de refracție n și de grosime h, acoperită pe ambele fețe cu straturi *semi*reflectante. Notăm cu R_1 și R_2 coeficienții de reflexie pentru intensitate a celor două straturi (r_1 și r_2 - coeficienții de reflexie pentru amplitudine) și cu T_1 și T_2 (respectiv t_1 și t_2) coeficienții de transmisie.

1. - Care sunt valorile posibile ale mărimii h pentru ca filtrul să prezinte un maxim de intensitate pentru radiația $\lambda_0 = 500\,\mathrm{nm}$, fasciculul de raze paralele fiind normal la suprafață? Care sunt valorile mărimii h pentru ca filtrul să prezinte o singură bandă de transmisie în domeniul vizibil? Pentru calcule se consideră ($n = 2{,}3$) și se presupune că la reflexie nu apare nici un defazaj.

R: Datorită reflexiilor multiple apar mai multe raze a căror intensitate descrește, iar între razele succesive apare diferența de drum, în cazul incidenței normale: $\Delta = 2nh$ (fig. 115). Un maxim ale transmisiei apare dacă toate razele transmise sunt în fază adică: $2nh = k\lambda_0$, de unde: $h = kh_0$, unde:

$$h_0 = \frac{\lambda_0}{2n} = \frac{500}{4{,}6} = 108{,}7\,\mathrm{nm}$$

($h_0 = 108{,}7\,\mathrm{nm}$ corespunde cazului $\Delta = k\lambda_0$).

Pentru această grosime a lamei transparente, de la o extremitate la alta a spectrului vizibil $(400 \div 800)\mathrm{nm}$ numărul k variază între limitele:

$$\frac{500}{400} \rangle k_1 = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \rangle \frac{500}{800}.$$

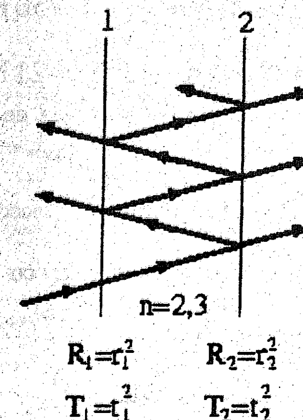


Fig. 115

Dacă considerăm grosimea stratului $h = 2h_0$, atunci $\Delta = 2\lambda_0$, deci:

$$\frac{10}{4} \rangle k_2 = \frac{2\lambda_0}{\lambda} \rangle \frac{5}{8},$$

iar pentru $h = 3h_0$, avem: $\Delta = 3\lambda_0$:

$$\frac{1{,}5}{4} \rangle k_3 \rangle \frac{1{,}5}{8} \quad (k = 3;\ \lambda = 500\,\mathrm{nm}\ \text{- maxim de intensitate}).$$

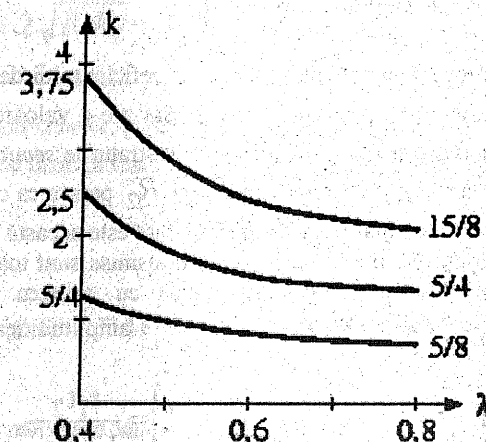


Fig. 116

Această valoare nu îndeplinește condițiile problemei deoarece transmisia mai prezintă un maxim în vizibil și pentru:

$$\Delta = 3\lambda_0 = 2\lambda \text{, adică: } \lambda = \frac{3\lambda_0}{2} = 750\,\text{nm}.$$

Grosimile convenabile sunt: $h_0 = 108{,}7\,\text{nm}$ și $2h_0 = 217{,}4\,\text{nm}$ Reprezentarea grafică a variației lui k (transmisie maximă) cu lungimea de undă pentru cele trei grosimi are apectul din fig. 116.

2. - Cum se vor modifica rezultatele problemei precedente dacă reflexiile pe cele două suprafețe introduc întârzieri de fază egale respectiv cu $\frac{\pi}{10}$, respectiv $\frac{\pi}{20}$.

R: Diferența de fază suplimentară va fi:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{20} = \frac{3\pi}{20} = \frac{2\pi\Delta'}{\lambda},$$

ceea ce corespunde la o diferență de drum optic: $\Delta' = \frac{3}{40}\lambda$. In acest caz maximul transmisiei va corespunde la:

$$2nh + \frac{3}{40}\lambda_0 = k\lambda_0 \text{, de unde: } h = \frac{k\lambda_0}{2n} - \frac{3}{80}\frac{\lambda_0}{n}.$$

Deci oricare ar fi valoarea ordinului k, grosimile sunt micșorate cu: $\frac{3}{80}\frac{\lambda_0}{n} = 8{,}1\,\text{nm}$, adică vor fi: $100{,}6\,\text{nm}$, respectiv $209{,}3\,\text{nm}$. Prin urmare **numărul benzilor de transmisie ale filtrului nu se modifică.**

3. - Să se calculeze pentru acest filtru valoarea coeficientului de transmisie al intensității τ_0, pentru lungimea de undă pentru care acesta are o valoare maximă. Se presupune că nu există pierderi de energie prin absorbție în straturile *semi*reflectante. Ce relație trebuie să existe între coeficienții de reflexie R_1 și R_2 pentru ca coeficientul de transmisie maxim să ia valoarea cea mai mare posibilă și care este această valoare.

R: Valoarea grosimii este în așa fel aleasă încât razele transmise sunt toate în fază. Să considerăm valoarea amplitudinii razei incidente egală cu unitatea. Toate razele transmise sunt în fază și suprapuse (incidența $i = 0$), deci amplitudinea rezultantă la infinit este egală cu (fig. 117):

$$A = t_1t_2\left[1 + r_1r_2 + \cdots + (r_1r_2)^n + \cdots\right] = \frac{t_1t_2}{1 - r_1r_2},$$

de unde: $$\tau_0 = \frac{t_1^2t_2^2}{(1 - r_1r_2)^2} = \frac{T_1T_2}{1 + R_1R_2 - 2\sqrt{R_1R_2}}.$$

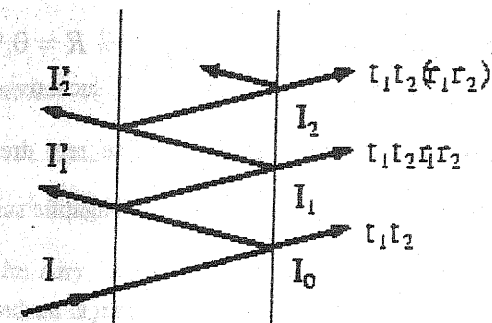


Fig. 117

Dacă nu sunt pierderi de energie în straturile *semi*reflectante, atunci: $T_1 + R_1 = 1$ și $T_2 + R_2 = 1$, deci:

$$\tau_0 = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{1 + R_1R_2 - 2\sqrt{R_1R_2}} = \frac{1 - R_1 - R_2 + R_1R_2}{1 + R_1R_2 - 2\sqrt{R_1R_2}} =$$

$$= 1 - \frac{R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1R_2}}{1 + R_1R_2 - 2\sqrt{R_1R_2}}$$

Valoarea maximă a coeficientului τ_0 se obține pentru:

$R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1R_2} = 0$, ceea ce conduce la: $R_1 = R_2$, iar $\tau_0 = 1$.

Dacă $\tau_0 = 1$ rezultă că pentru $\lambda = \lambda_0$ se obține $R_0 = 0$, adică nu există fascicul reflectat. Intr-adevăr, prima rază reflectată (I_1') are amplitudinea egală cu r_1 și se află în opoziție de fază cu toate celelalte raze a căror amplitudine rezultantă:

$\frac{t_1t_2r_2}{1 - r_1r_2}$ este egală cu r_1;

în acest caz: $r_1 = r_2$ și $T = t_1^2 = t_2^2 = 1 - R$; $\frac{t_1t_2r_2}{1 - r_1r_2} = \frac{(1 - R)r_2}{1 - R} = r_1$.

4. - Să se calculeze valoarea coeficientului de transmisie $\tau(\lambda)$ în funcție de lungimea de undă. Pentru simplificare se presupune că cele două straturi *semi*reflectante sunt identice, valoarea comună a coeficientului lor de reflexie fiind R. Să se traseze

curba $\tau(\lambda)$. Să se calculeze lățimea bandei de transmisie a filtrului δ_λ (pentru $\tau(\lambda) = \frac{\tau_{max}}{2}$). Calculul se va face pentru valorile grosimii h carora le corespund o singură bandă de transmisie în domeniul vizibil. Se consideră $R = 0,9$

R: Defazajul între două raze transmise succesiv este egal cu: $\varphi = \frac{2\pi(\Delta + \Delta')}{\lambda}$. Dacă considerăm faza razei cu indice zero drept origine, atunci faza razei cu indice n are o întârziere egală cu $n\,\varphi$, iar elongațiile sunt egale cu:

$$0 \quad t_1 t_2 \cos(\omega t - 0)$$
$$1 \quad t_1 t_2 r_1 r_2 \cos(\omega t - \varphi)$$
$$\dots$$
$$n \quad t_1 t_2 (r_1 r_2)^n \cos(\omega t - n\,\varphi).$$

Utilizând formalismul numerelor complexe se poate obține expresia elongației rezultante:

$$a = \sum_0^n t_1 t_2 (r_1 r_2)^n e^{i\omega t} e^{-i n\varphi} = t_1 t_2 e^{i\omega t} \sum_0^n \left(r_1 r_2 e^{-i\varphi}\right)^n =$$
$$= \frac{t_1 t_2 e^{i\omega t}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\varphi}} = \frac{t_1 t_2 e^{i\omega t}}{1 - r_1 r_2 \cos\varphi + i\, r_1 r_2 \sin\varphi}$$

(rația $q = r_1 r_2 e^{-i\varphi}$).

Considerând pătratul expresiei de mai sus (produsul complex-conjugat) se obține expresia coeficientului de transmisie:

$$\tau(\lambda) = \frac{t_1^2 t_2^2}{1 - r_1^2 r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\varphi} = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2}\cos\varphi}.$$

Dacă cele două straturi sunt identice și neabsorbante ($R_1 = R_2 = R$ și $R + T = 1$), atunci:

$$\tau(\lambda) = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{1 + m\sin^2\frac{\varphi}{2}}, \text{ unde: } m = \frac{4R}{(1-R)^2}.$$

Pentru cele două grosimi determinate la punctul (1) se obține:

$R = 0,9$ deci $m = 360$.

$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$, pentru: $\Delta = \lambda_0$, se obține: $\frac{\varphi_1}{2} = \pi\frac{\lambda_0}{\lambda}$

$\Delta = 2\lambda_0$ $\qquad \frac{\varphi_2}{2} = 2\pi\frac{\lambda_0}{\lambda}$.

Forma curbelor $\tau(\lambda)$ este descrisă de funcțiile:

$$\tau_1(\lambda) = \frac{1}{1 + 360\sin^2\pi\frac{\lambda_0}{\lambda}} \text{ și } \tau_2(\lambda) = \frac{1}{1 + 360\sin^2\pi\frac{2\lambda_0}{\lambda}},$$

care sunt funcțiile lui Airy. In apropierea maximului ($\lambda = \lambda_0$) panta este foarte mare, iar intensitatea se reduce la jumătate pentru:

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{360}, \text{ adică } \frac{\varphi}{2} \cong k\pi \pm \frac{\pi}{60},$$

de unde:

$$\frac{\varphi_1}{2} = \pi \pm \frac{\pi}{60};\ \pi\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \pi \pm \frac{\pi}{60};\ \lambda_1 = \lambda_0\left(1 \mp \frac{1}{60}\right) = (500 \mp 8,3)\text{nm}.$$

Deci banda de transmisie este cuprinsă între:

$\lambda_1 = 491,7\,\text{nm}$ și $\lambda_1' = 508,3\,\text{nm}$ cu lățimea $\delta\lambda_1 = 16,8\,\text{nm}$.

$$\frac{\varphi_2}{2} = 2\pi \pm \frac{\pi}{60};\ \frac{\lambda_0}{\lambda_2} = 1 \pm \frac{1}{120};\ \lambda_2 = \lambda_0\left(1 \mp \frac{1}{120}\right) = (500 \mp 4,2)\text{nm}.$$

$\lambda_2 = 495,8\,\text{nm}$ și $\lambda_2' = 504,2\,\text{nm}$, cu lățimea $\delta\lambda_2 = 8,4\,\text{nm}$.

(în cel de al doilea caz banda de transmisie - domeniul spectral transmis - se reduce la jumătate).

5. - Cum se modifică lungimea de undă corespunzătoare maximului de transmisie (λ_i) dacă se utilizează raze sub unghi de incidență i în loc de incidență normală? Pentru ce valori ale unghiului de incidență (i') lungimea de undă λ_i devine egal cu λ_1 sau λ_2 (din problema precedentă)? Pe baza acestui rezultat, ce se poate spune despre utilizarea filtrelor interferențiale în fascicule cu deschidere unghiulară finită? Se va determina valoarea unghiului i' pentru un filtru realizat dintr-o substanță transparentă cu $n = 2,3$ (sulfură de zinc) și pentru un filtru cu aceeași lungime de undă însă realizat dintr-o substanță cu $n = 1,3$ (criolit). Ce concluzie se poate trage?

R: Pentru incidență oblică diferența de drum este: $\Delta = 2nh\cos r$. Maximul transmisiei apare pentre $\lambda_i \neq \lambda_0$, care îndeplinește condiția:

$$2\,\mathrm{nh}\cos r = \mathrm{k}\,\lambda_i .$$

Deoarece $2\,\mathrm{nh} = \mathrm{k}\,\lambda_0$, rezultă că $\lambda_i = \lambda_0 \cos r \langle \lambda_0$ oricare ar fi valoarea k. Deci dacă unghiul de incidență i crește, unghiul r crește, valoarea λ se micșorează, prin urmare banda de transmisie se deplasează spre lungimi de undă mai mici.

Pentru $\mathrm{k} = 1$, adică $\mathrm{h} = \mathrm{h}_0$ se obține: $\lambda_1 = \lambda_2\left(1 \mp \dfrac{1}{60}\right)$.

Prin urmare: $\lambda_i = \lambda_1 = \lambda_0\left(1 - \dfrac{1}{60}\right) = \lambda_0 \cos r \;\; (i \neq 0,\; \lambda_i$ se micșorează), deci:

$$\cos r = 1 - \frac{1}{60};\; \sin^2 r = \frac{119}{3600} \text{ și } \sin i = \mathrm{n}\sin r = \frac{\mathrm{n}\sqrt{119}}{60}.$$

Pentru: $\mathrm{n} = 2{,}3$; $\sin i = \dfrac{2{,}3\sqrt{119}}{60} \cong 0{,}42$; $i \cong 24^\circ 36' 30''$

$\mathrm{n} = 1{,}3$; $\qquad i \cong 13^\circ 36' 50''$.

Pentru $\mathrm{k} = 2$, adică $\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h}_0$ se obține:

$$\lambda_i = \lambda_2 = \lambda_0\left(1 - \frac{1}{120}\right);\; \cos r = 1 - \frac{1}{120};\; \sin i = \frac{\mathrm{n}\sqrt{239}}{120}.$$

Dacă: $\mathrm{n} = 2{,}3$; $i \cong 17^\circ 13' 20''$, respectiv $\mathrm{n} = 1{,}3$; $i \cong 9^\circ 38'$.

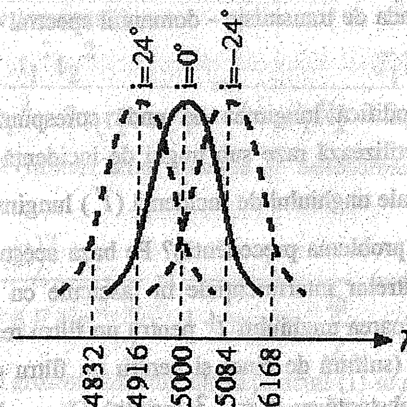


Fig. 118

Deci dacă fasciculul incident prezintă o deschidere unghiulară finită, banda de transmisie a filtrului se lărgește. In cazul de față ($\mathrm{k} = 1, \mathrm{n} = 2{,}3$) lățimea benzii devine egală cu $33{,}6\,\mathrm{nm}$ (fig. 118). Se observă că fenomenul de lărgire a benzii de transmisie pentru fascicule cu deschidere unghiulară finită este cu atât mai mare cu cât indicele de refracție al materialului este mai mare:

($\mathrm{n} = 1{,}3$ - criolit - $\mathrm{h} = \mathrm{h}_0$; $i_i \cong 13^\circ 36' 50''$, iar pentru

$\mathrm{n} = 2{,}3$ - sulfură de zinc - $\mathrm{h} = \mathrm{h}_0$; $i_i \cong 24^\circ 36' 30''$).

6. - Să se studieze comportarea unui filtru care are stratul mijlociu constituit dintr-o lamă cristalină birefringentă a cărei indice de refacție pentru vibrații rectilinii paralele cu liniile neutre ale lamei sunt n_x și n_y. In ce condiții două radiații cu lungimile de undă λ' și λ'' pot fi transmise simultan cu intensitate maximă și în același ordin de interferență de către acest filtru iluminat cu lumină nepolarizată? Fiind date lungimile de undă precum și substanța birefringentă, totdeauna pot fi îndeplinite condițiile de mai sus?

R: Presupunem că reflexia radiației pe suprafața *semi*reflectantă nu modifică starea de polarizare a acesteia. Pentru o oscilație paralelă cu una din direcțiile neutre nu apare nici o modificare în calcule (trebuie să se ia în considerare numai indicele de refracție corespunzător). Dacă lama birefringetă este iluminată cu lumină naturală, la ieșirea din lamă fiecărei radiații îi va corespunde două oscliații reciproc perpendiculare. Direcția de propagare a celor două raze depinde de modul cum este tăiată lama birefringentă față de axul optic. Cele două componente ale aceleași radiații nu pot fi transmise simultan cu intensitate maximă. Acest lucru este realizabil numai pentru două radiații diferite dacă sunt îndeplinite condițiile: $\lambda' = \dfrac{2\,\mathrm{n}_x\mathrm{h}}{\mathrm{k}'}$ și $\lambda'' = \dfrac{2\,\mathrm{n}_y\mathrm{h}}{\mathrm{k}''}$.

Ca filtrul să transmită simultan cu intensitate maximă și sub același ordin de interferență cele două radiații este necesar:

$$\frac{2\,\mathrm{h}}{\mathrm{k}} = \frac{\lambda'}{\mathrm{n}_x} = \frac{\lambda''}{\mathrm{n}_y} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\mathrm{n}}.$$

Această condiție arată că alegerea celor două lungimi de undă este limitată de substanța considerată. Dacă se lucrează cu două lame "încrucișate" de grosimi h_1 și h_2 atunci apar mai multe posibiltăți care derivă din condițiile:

$$2\,\mathrm{n}_x\mathrm{h}_1 + 2\,\mathrm{n}_y\mathrm{h}_2 = \mathrm{k}\,\lambda' \text{ și } 2\,\mathrm{n}_y\mathrm{h}_1 + 2\,\mathrm{n}_x\mathrm{h}_2 = \mathrm{k}\,\lambda''.$$

Pentru toate substanțele diferența $\Delta\mathrm{n} = \mathrm{n}_x - \mathrm{n}_y$ este suficient de mică. De ex.: spat de Islanda $\mathrm{n}_o - \mathrm{n}_e = 0{,}17$.

Interferența a două fascicule obținute prin reflexie.

Oscilații polarizate liniar și eliptic

Pe o suprafață plană, reflectantă, este incident un fascicul de raze paralele de radiație armonică, liniar polarizată. Unghiul de incidență al fasciculului pe suprafață este egal cu α, iar factorul de reflexie al acesteia este egal cu 1 (în acest caz defazajul introdus prin reflexie este egal cu π). Să se analizeze două cazuri:

a) direcția oscilațiilor este perpendiculară pe planul de incidență;

b) direcția oscilațiilor este dispusă în planul de incidență.

1. - Să se calculeze, în punctul M situat la distanță z de suprafață, diferența de drum optic între două raze, una aparținând fasciculului incident cealaltă fasciculului reflectat, precum și intensitatea energetică în acel punct. Să se analizeze dacă, în ambele cazuri, se poate observa fenomenul de interferență.

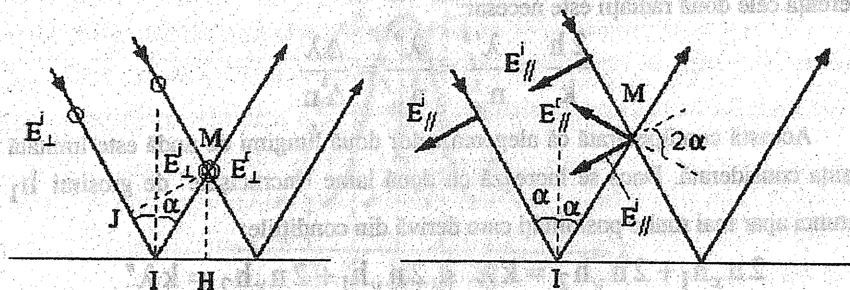


Fig. 119 Fig. 120

R: Considerăm segmentul MJ - perpendicular pe direcția razelor incidente, aparținând frontului de fază constantă (fig. 119). Diferența de drum optic în punctul M este egală cu:

$$\delta = JI + IM = \frac{z}{\cos\alpha} + \frac{z}{\cos\alpha}\cos 2\alpha = 2z\cos\alpha .$$

a) În punctul M interferă o rază incidentă cu una reflectată. Intensitățile componentelor electrice corespondente $E_{\perp}^{i}$ și $E_{\perp}^{r}$, prezentate în fig. 119, sunt coliniare. Intensitatea energetică obținută ca rezultat al interferenței celor două oscilații este:

$$I = 2a^{2}\left[1+\cos(\varphi+\pi)\right],$$

unde mărimea $(\varphi+\pi)$ reprezintă diferența de fază între oscilații, iar:

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi\, z\cos\alpha}{\lambda},$$

unde s-a considerat că la reflexie se introduce o valoarea a defazajului egală cu π. Să se calculeze contrastul figurii de interferență și să se justifice că este egal cu 1.

b) Deoarece la reflexie se introduce un defazaj egal cu π, la incidență normală, dacă E^{i} reprezintă intensitatea componentei electrice incidente, după reflexie, intensitatea componentei E^{r} prezintă orientarea indicată în fig. 121.

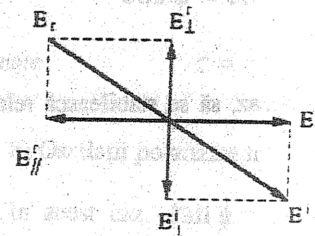


Fig. 121

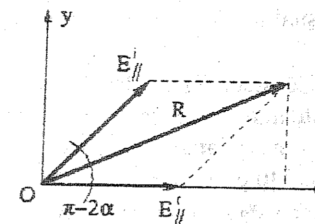


Fig. 122

Dacă valoarea defazajului este egală cu π, iar mărimea unghiului de incidență crește față de normală, oscilațiile $E_{\parallel}$ care se întâlnesc în punctul M au orientarea indicată în fig. 120. Considerând că razele corespunzătoare celor două oscilații formează între ele unghiul 2α, să calculăm intensitatea determinată de compunerea acestora în punctul M. Dacă se consideră două axe perpendiculare Ox, Oy, unde Ox coincide cu una din cele două oscilații (fig. 122), se obține:

$$E_{\parallel}^{i} = a\cos\omega t \quad \text{și} \quad E_{\parallel}^{r} = a\cos(\omega t - \varphi)$$

Componentele rezultantei R sunt:

$$x = a\cos(\omega t - \varphi) - a\cos 2\alpha \cos \omega t = \\ = a\cos(\omega t - \varphi) + a\cos 2\alpha \cos(\omega t + \pi)'$$

$$y = a\sin 2\alpha \cos \omega t,$$

prin urmare intensitatea I radiantă este dată de:

$$I = a^2 \sin^2 2\alpha + a^2 + a^2 \cos^2 2\alpha + 2a^2 \cos 2\alpha \cos(\varphi + \pi) = \\ = 2a^2(1 - \cos 2\alpha \cos\varphi)$$

(Uneori se consideră intensitatea radiantă (energetică) corespunzătoare oscilației polarizate liniar $x = a\cos(\omega t - \varphi)$ ca fiind egală cu $I = \frac{1}{T}\int_0^T a^2 \cos^2(\omega t - \varphi)dt = a^2$. Deci în cazul unei oscilații polarizate eliptic se obține: $I = a^2 + b^2$)

Intensitatea rezultantei depinde de unghiul de fază φ și de valoarea unghiului α, iar contrastul tabloului de interferență depinde de unghiul α:

$$\gamma = \frac{I_M(\varphi = \pi) - I_m(\varphi = 0)}{I_M(\varphi = \pi)} = \frac{2\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

Dacă: $\alpha = \frac{\pi}{4}$, atunci: $\gamma = 0$ (în punctul M, direcțiile cele două oscilații care interferă sunt reciproc perpendiculare).

2. - Considerând condițiile celei de al doilea caz, să se stabilească relația ce trebuie să existe între mărimile z și α pentru a obține:

a) oscilații polarizate circular;

b) oscilații polarizate liniar.

R: a) oscilații polarizate circular

Dependența de timp a componentelor x și y poate fi exprimată sub forma:

$$x = A\cos(\omega t - \phi) \text{ și } y = B\cos\omega t,$$

unde: $A^2 = a^2 + a^2\cos^2 2\alpha + 2a^2 \cos 2\alpha \cos(\varphi + \pi)$ și

$$B^2 = a^2 \sin^2 2\alpha,$$

iar: $$\tan\phi = -\frac{\sin\varphi}{\cos 2\alpha - \cos\varphi}.$$

Pentru ca oscilația rezultantă să fie polarizată-circular, este necesar:

$$A^2 = B^2 \text{ și } \phi = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ sau}$$

$$a^2 + a^2\cos^2 2\alpha - 2a^2 \cos 2\alpha \cos\varphi = a^2 \sin^2 2\alpha,$$

de unde: $$\cos 2\alpha(\cos 2\alpha - \cos\varphi) = 0.$$

Această ecuație este satisfăcută de două soluții.

Prima soluție: $\cos 2\alpha = 0$, de unde: $2\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Singura soluție posibilă este: $\alpha = \frac{\pi}{4}$. In acest caz:

$$x = a\cos[\omega t - (\varphi + \pi)] \text{ și } y = a\cos\omega t.$$

Amplitudinile maxime sunt egale și trebuie îndeplinită condiția:

$$\varphi + \pi = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

de unde:

$$z = \frac{\lambda}{8\cos\alpha}(2k-1) \text{ sau } z = \frac{\lambda}{4\sqrt{2}}(2k-1).$$

A doua soluție a ecuației este: $\cos 2\alpha - \cos\varphi = 0$, care conduce la: $\tan\phi = \infty$, care reprezintă o valoare convenabilă a mărimii ϕ. Rezultă: $\cos\varphi = \cos 2\alpha$, de unde: $\varphi = \pm 2\alpha + 2k\pi$.

Prin urmare: $$z = \pm\frac{\alpha\lambda}{2\pi\cos\alpha} + \frac{k\lambda}{2\cos\alpha}$$

b) Oscilații polarizate liniar.

In acest caz: $\tan\phi = -\frac{\sin\varphi}{\cos 2\alpha - \cos\varphi} = 0$, deci: $\sin\varphi = 0$, adică: $\varphi = k\pi$, de unde:

$$z = \frac{k\lambda}{4\cos\alpha}.$$

Interferența fasciculelor obținute prin reflexie pe fețele unei prisme

O prismă ABC, confecționată din sticlă caracterizată prin indicele de refracție n, este iluminată cu un fascicul de raze paralele de radiație armonică cu lungimea de undă λ (fig. 123). Unghiul de incidență al fasciculului pe fața AB este egal cu α, iar β reprezintă valoarea unghiului A al prismei. Se observă sistemul de franje determinat de interferența fasciculelor obținute prin reflexie pe fețele AB și AC ale prismei.

1. - Să se calculeze, într-un punct M dispus pe fața AB, diferența de fază δ funcție de mărimile α, β, n și x, unde x caracterizează poziția punctului M ($x = AM$).

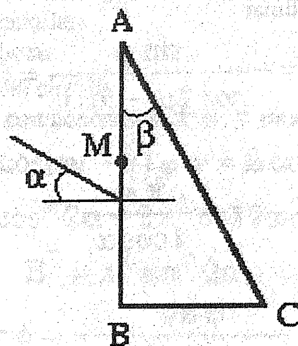


Fig. 123

R: Razei incidente R îi corespund două raze reflectate R_1 și R_2 (fig. 124); fasciculelor reflectate, cărora le aparțin razele R_1 și R_2, le corespund suprafețele de undă (P_1) și (P_2), care se intersectează în vârful A al prismei unde oscilațiile sunt în fază. In punctul M al feței AB interferă oscilațiile care corespund razelor MH_1 și MH_2, perpendiculare pe fronturile de fază (undă) plane (P_1) și (P_2). Considerând reflexia dintr-un mediu mai puțin refringent pe un mediu mai refringent, diferența de fază în punctul M este:

$$\delta = MH_2 - MH_1 + \frac{\lambda}{2},$$

Segmentul MH_2 este paralel cu raza R_2, care formează cu normala la fața AB unghiul i, deci:

$$\sin i = n \sin(r + 2\beta),$$

unde r reprezintă unghiul de refracție corespunzător unghiului de incidență α. Unghiul MAH_2 este egal cu i, prin urmare:

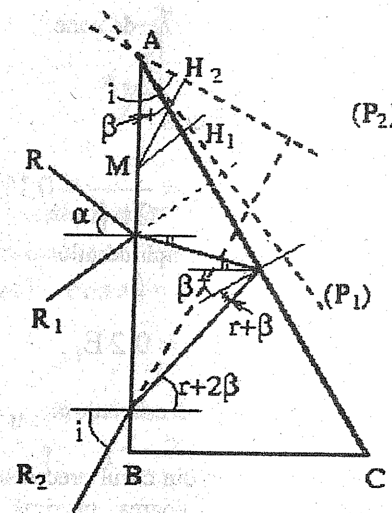


Fig. 124

$$MH_2 = x \sin i = n\, x \sin(r + 2\beta).$$

Segmentul MH_1 este paralel cu R_1, unghiul MAH_1 este egal cu α și $MH_1 = x \sin\alpha$, de unde:

$$\delta = n\,x\sin(r+2\beta) - x\sin\alpha + \frac{\lambda}{2},$$

relaţie ce poate fi scrisă sub forma:

$$\delta = x\sin\alpha(\cos 2\beta - 1) + n\,x\sin 2\beta\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} + \frac{\lambda}{2}.$$

2. - Să se stabilească expresia mărimii δ în cazul unor valori mici ale unghiului β. Să se calculeze valoarea interfranjei tabloului de interferenţă care apare pe faţa AB a prismei considerând că $\alpha = 0$, $\beta = 3'$, $\lambda = 500\,\text{nm}$ şi $n = 1{,}5$. Să se explice de ce observarea sistemului de franje de interferenţă este mai comodă prin reflexie decât prin transmisie?

R: Considerând valoarea unghiului de incidenţă $\alpha \neq 0$, dacă valoarea unghiului β este mică atunci:

$$\delta \cong 2n\,x\beta\cos r + \frac{\lambda}{2} = 2n\,e\cos r + \frac{\lambda}{2},$$

unde: $e \cong x\beta$ reprezintă grosimea prismei în punctul M.

Interfranja $\Delta x = i$ este dată de relaţia:

$\delta \cong 2n\,\Delta x\beta\cos r = \lambda$, de unde:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2n\beta\cos r}.$$

Dacă $\alpha = 0$, atunci $r = 0$, deci: $\Delta x = \dfrac{\lambda}{2n\beta} = 0{,}19\,\text{mm}$.

In cazul fascicului transmis, valorile amplitudinilor oscilaţiilor care interferă sunt foarte diferite:

$$E_r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}E_i = 0{,}2\,E_i,$$

şi ca rezultat vizibilitatea tabloului de interferenţă este redusă.

3. - Menţinând condiţiile experienţei din cazul precedent, se măreşte valoarea lăţimii sursei de radiaţie optică. Dacă valoarea maximă a mărimii x este $x = 50\,\text{mm}$, să se stabilească valoarea dimensiunii unghiulare a sursei ce poate fi acceptată. Se consideră că pentru o variaţie $\delta \le \dfrac{\lambda}{4}$, contrastul tabloului de interferenţă este încă acceptabil. Să se construiască suprafaţa de localizare a franjelor.

R: Dacă variaţia diferenţei de drum optic δ funcţie de unghiul de incidenţă i trebuie să fie inferioară valorii $\dfrac{\lambda}{4}$, atunci pentru valoarea maximă a mărimii e se obţine:

$$\alpha = 0, \qquad \delta = 2n\,x\beta = \lambda$$

$$\alpha = i \neq 0, \qquad \delta - \Delta\delta = 2n\,x\beta\cos r = \lambda - \frac{\lambda}{4},$$

de unde:

$$\Delta\delta = 2n\,e(1-\cos r) \le \frac{\lambda}{4}.$$

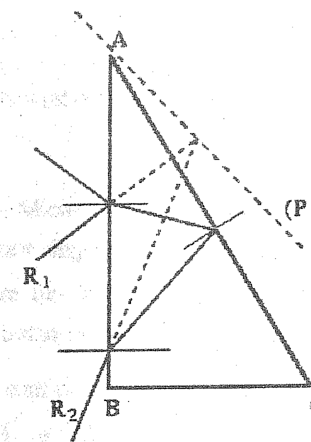


Fig. 125

Această relaţie poate fi transformată sub forma:

$$2n\,e(1-\cos r) = 2n\,e\left(1-\sqrt{1-\frac{\sin^2 i}{n^2}}\right) \cong$$

$$\cong 2n\,e\left[1-\left(1-\frac{i^2}{2n^2}\right)\right] = 2n\,e\frac{i^2}{2n^2} \le \frac{\lambda}{4}$$

de unde:

$$i \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n\lambda}{e}}.$$

Deci este permisă lăţimea unghiulară a sursei care, pe suprafaţa AB a prismei, determină o variaţie a unghiului de incidenţă care satisface condiţia de mai sus.

Franjele sunt localizate în planul (P) perpendicular pe planul figurii a cărui urmă trece prin punctul de întâlnire a razelor reflectate R_1 și R_2 (care corespund aceleiași raze incidente R) și prin vârful A al prismei (fig. 125).

Aplicație numerică: $e = x\beta = 44 \cdot 10^{-3}$ mm, de unde: $i \leq 0{,}064$ rad.

Interferometrul Michelson. Spectrul canelat

Un interferometru Michelson este iluminat de sursa punctiformă S (fig. 126). Oglinzile M_1 și M_2 sunt dispuse fiecare la distanța D de punctul I, punct de întâlnire cu lama divizoare de fascicul G a unei raze care provine din S și este normală pe oglinda M_1. Sursa S este de asemenea situată la distanța D de punctul I. Oglinzile M_1 și M_2 sunt perpendiculare între ele și dispuse la 45° față de lama G. Aplicăm oglinzilor M_1 și M_2 o rotație mică de unghi α (fig. 127), în același sens, în jurul axelor perpendiculare pe planul fig. 127, care trec prin punctele O_1 și O_2. In problemă nu se vor considera efectele determinate de reflexia pe lama divizoare G sau de transmisia acesteia.

1. – a) Să se stabilească poziția imaginilor virtuale S_1 și S_2 ale sursei S, corespunzătoare fasciculele emergente formate prin divizare și reflexii pe oglinzi. Aceste imagini sunt formate prin reflexii pe elementele optice G, M_1 și M_2. Se va folosi imaginea M_1' a oglinzii M_1 formată față de lama divizoare de fascicul G. Să se realizeze o schemă explicativă.

R: Imaginile S_1 și S_2 ale sursei S, formate de oglinda M_1, respectiv M_2 (fig. 128), sunt simetrice față de axa IO_2, deci $O_2S_1 = O_2S_2 = 2D$.

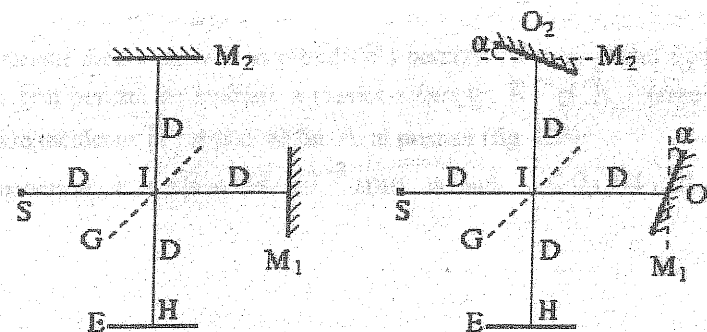


Fig. 126 Fig. 127

1. – b) Să se calculeze distanța dintre imaginile S_1 și S_2 și distanța de la segmentul S_1S_2 la ecranul E, situat la distanța D de punctul I, funcție de mărimile D și α. Să se calculeze valorile corespunzătoare considerând $D = 1\,m$ și $\alpha = 1^o$.

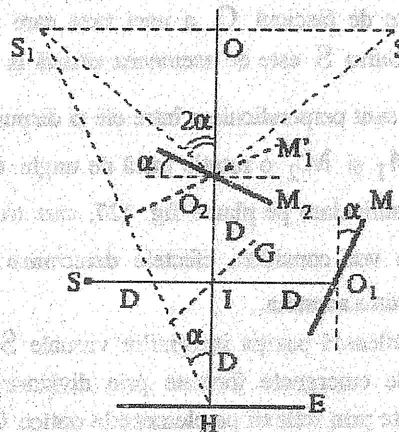


Fig. 128

R: Unghiul $IHS_1 = \alpha$, iar punctele S_1, S_2 și H sunt dispuse pe același cerc, deci : $\angle OO_2S_1 = 2\alpha$ și:

$$S_1S_2 = 4D\sin 2\alpha .$$

Dar $OO_2 = 2D\cos 2\alpha$, deci:

$$OH = 2D(1+\cos 2\alpha).$$

Aplicație numerică:

$\sin 2\alpha = 0{,}035$, prin urmare: $S_1S_2 = 0{,}14\,m$ și $OH = 4\,m$.

2. – Să presupunem că sursa S emite radiația monocromatică $\lambda = 500\,nm$. Se observă franjele de interferență pe ecranul E. Să se stabilească expresia interfranjei funcție de mărimea α și să se calculeze valoarea numerică.

R: Expresia interfranjei este:

$$i = \frac{\lambda OH}{S_1S_2} = \frac{\lambda(1+\cos 2\alpha)}{2\sin 2\alpha} \cong \frac{\lambda}{2\sin\alpha} = 14{,}28\mu\,m .$$

3. – Intre lama "divizor de fascicul" G și oglinzile M_1, respectiv M_2 (fig. 129), se introduc polarizatorii P_1, respectiv P_2, (a căror grosime este neglijabilă), iar "direcțiile de transmisie maximă" pot fi paralele sau în cruce.

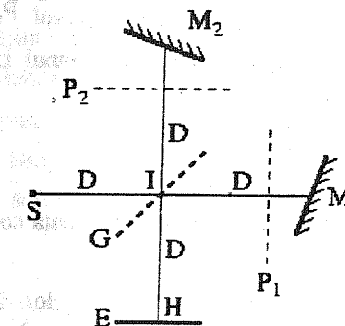


Fig. 129

a) Să se descrie tabloul de interferență observat pe ecranul E dacă direcțiile P_1, respectiv P_2 sunt paralele, respectiv perpendiculare.

R: Dacă direcțiile P_1 și P_2 sunt paralele atunci se observă franjele de interferență; dacă acestea sunt în cruce, direcțiile de acțiune a componentelor electrice ale câmpurilor *em* care interferă sunt perpendiculare și incoerente, prin urmare nu se poate observa fenomenul de interferență.

b) Să considerăm că razele de radiație optică emergente din sursa S traversează un polarizator P plasat între punctele S și I (nereprezentat pe figură). Polarizorii P_1 și P_2 sunt dispuși "în cruce", iar oscilațiile transmise de către aceștia sunt orientate la 45^o față de cele transmise de P. Să se descrie tabloul observat și să

se justifice formarea acestuia. Cum trebuie completat montajul dacă dorim să observăm tabloul de interferenţă.

R: In acest caz, oscilaţiile transmise de polarizorii P_1 şi P_2 sunt reciproc perpendiculare, coerente şi de amplitudine egală, filtrul de polarizare P fiind orientat la 45^o faţă de P_1 şi P_2. Aceste oscilaţii reciproc perpendiculare, deşi prezintă între ele un defazaj φ, variabil, conduc la o iluminare uniformă a tabloului de interferenţă. Radiaţia optică este polarizată eliptic, axele elipsei fiind orientate la 45^o faţă de direcţiile filtrelor P_1 şi P_2. Pentru a obţine un tablou de interferenţă cu cel mai bun contrast, după P_1 şi P_2, trebuie plasat un analizor, a cărui direcţie de oscilaţie este paralelă cu cea a filtrului P.

4. – Ambele oscilaţii transmise de filtrele de polarizare P_1 şi P_2 sunt perpendiculare pe planul figurii, dar cele transmise de filtrul P_1 formează un unghi θ cu precedentele. Să se analizeze variaţia iluminării pe ecranul E. Analiza se va efectua calculând vizibilitatea:

$$\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max}},$$

în funcţie de unghiul θ. Să se reprezinte grafic dependenţa contrastului γ de variaţia unghiului θ.

R: Polarizatorului P asigură coerenţa oscilaţiilor. Direcţia oscilaţiilor care interferă la nivelul ecranului formează între ele un unghi θ. Componentele pe axele perpendiculare Ox, Oy (fig. 130) ale rezultantei R sunt:

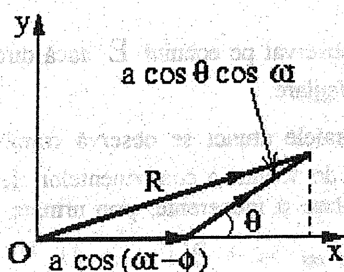


Fig. 130

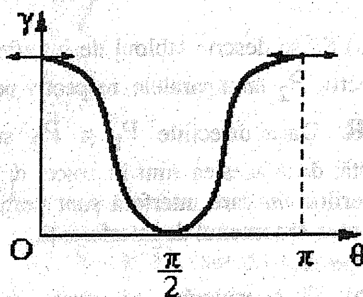


Fig. 131

$$x = a\cos(\omega t - \varphi) + a\cos^2\theta\cos\omega t = A\cos(\omega t - \Phi)$$
$$y = a\cos\theta\sin\theta\cos\omega t = B\cos\omega t.$$

Mărimea A^2 se poate calcula folosind construcţia Fresnel:

$$A^2 = a^2 + a^2\cos^4\theta + 2a^2\cos^2\theta\cos\varphi$$
$$B^2 = a^2\cos^2\theta\sin^2\theta$$
$$I = A^2 + B^2 = a^2\left(1 + \cos^2\theta + 2a^2\cos^2\theta\cos\varphi\right)$$
$$I_{max} = a^2\left(1 + 3\cos^2\theta\right),\quad I_{min} = a^2\left(1 - \cos^2\theta\right)$$
$$\gamma = \frac{4\cos^2\theta}{1 + 3\cos^2\theta}.$$

Dependenţa valorii contrastului tabloului de interferenţă γ de variaţia unghiului de defazaj θ este prezentată în fig. 131.

5. – Cei trei polarizatori fiind eliminaţi, presupunem $\alpha = 0$, iar distanţa de la punctul I la oglinda M_2 este egală cu $D + d$. Să se calculeze raza inelelor de interferenţă obţinute pe ecranul E. Considerând radiaţie armonică ($\lambda = 500\,nm$) şi $d = 0{,}1\,mm$, să se calculeze raza primului inel luminos.

R: Sursa fiind punctiformă se observă inelele nelocalizate. In acest caz imaginile S_1 şi S_2 sunt aliniate pe axa IH şi separate prin distanţa $2d$. Această distanţă fiind mică se poate scrie (fig. 132):

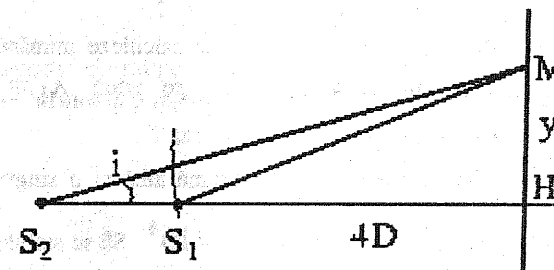


Fig. 132

$$\delta \cong 2d\cos i \cong 2d - d i^2.$$

In centrul tabloului de interferenţă se poate scrie relaţia:

$$\frac{\delta_0}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda} = k_0,$$

iar în punctul M:

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda} - \frac{d i^2}{\lambda} = k,$$

de unde: $$k_0 - k = \frac{d i^2}{\lambda},$$

prin urmare: $$i = \sqrt{\frac{\lambda}{d}(k_0 - k)}.$$

Raza inelului de ordin k este:

$$y = 4D\sqrt{\frac{\lambda}{d}}\sqrt{(k_0 - k)}$$

Aplicație numerică: $\lambda = 500\,\text{nm}$, $d = 0{,}1\,\text{mm}$, deci: $k_0 = 400$; ordinul primului inel luminos este: $k = 399$, de unde:

$$y = 4D\sqrt{\frac{\lambda}{d}} = 28\,\text{cm}.$$

6. – Se consideră montajul din cazul precedent, dar sursa emite radiație optică albă și $d = D$. Să se descrie aspectul câmpului de interferență.

In planul ecranului E (acesta fiind înlăturat) se plasează fanta de intrare a unui spectograf cu dispersie normală (proporțională cu lungimea de undă) astfel încât centrul său să coincidă cu axa sistemului, adică cu punctul H. Considerând două axe: Oy paralelă cu fanta și Ox perpendiculară pe fantă, să se stabilească ecuația canelurilor întunecate.

Lungimea fantei fiind egală cu $2\,\text{cm}$, să se calculeze numărul de caneluri negre care apar în spectrul limitat de lungimile de undă $\lambda_1 = 400\,\text{nm}$ și $\lambda_2 = 800\,\text{nm}$. Să se indice grafic poziția lor în spectru.

Se consideră că sursa S nu mai emite lumină albă ci o singură radiație cu $\lambda = 500\,\text{nm}$ a cărui coeficient de finețe este $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 10^4$. Să se stabilească valoarea maximă a mărimii d pentru care este posibil să se observe franje în centrul tabloului de interferență.

R: Diferența de drum este foarte mare, iar sursa emite lumină albă; iluminarea rămâne uniform albă dar este un "alb de ordin superior", pentru că lumina, din cauza interferenței, comportă un mare număr de radiații stinse. Pe de altă parte, distanța d fiind importantă, calculul aproximativ al diferenței de drum în punctul M trebuie făcut mai cu grijă. Distanța S_1S_2 este egală cu $2D$ (fig. 133).

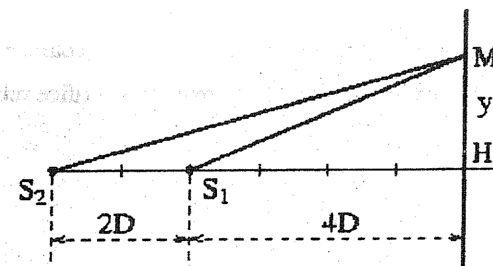


Fig. 133

$$\delta_M = \sqrt{y^2 + HS_2^2} - \sqrt{y^2 + HS_1^2} = \sqrt{y^2 + 36D^2} - \sqrt{y^2 + 16D^2}$$

$$\delta_M \cong 6D\left[1 + \frac{y^2}{2\cdot 36D^2}\right] - 4D\left[1 + \frac{y^2}{2\cdot 16D^2}\right] = 2D - \frac{y^2}{24D}$$

Iluminarea este egală cu zero dacă $\frac{\delta}{\lambda} = k + \frac{1}{2}$, adică:

$$\frac{2D}{\lambda} - \frac{y^2}{24D\lambda} = k + \frac{1}{2},$$

de unde se obține o relație între y și λ:

$$y^2 = 48D^2 - 12\lambda D(2k+1).$$

Considerând raportul de proporționalitate a mărimii x în raport cu λ egal cu 1, se obțin curbe care formează o rețea de caneluri în spectru; acestea sunt parabole:

$$y^2 = 48D^2 - 12Dx(2k+1).$$

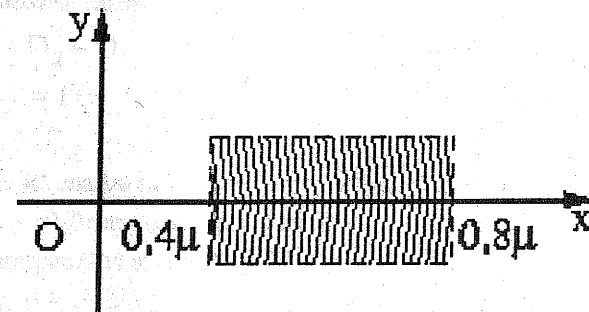


Fig. 134

Numărul de caneluri negre.

In centrul câmpului de interferenţă: $y = 0$, sau deoarece $x = \lambda$, pentru $400\,\text{nm} \le \lambda \le 800\,\text{nm}$ valorile ordinului k trebuie să verifice relaţia:

$$48D^2 - 12\lambda D(2k+1) = 0,$$

adică:

$$\frac{2D}{\lambda} = k + \frac{1}{2},$$

unde mărimea $\frac{2D}{\lambda}$ reprezintă ordinul de interferenţă în centru.

Punctele pentru care $y = 0$ reprezintă punctele de intersecţie ale parabolelor cu axa Ox. Numărul lor N este dat de

$$N = \frac{2D}{0,4} - \frac{2D}{0,8} = 2,5 \cdot 10^6$$

Valoarea este foarte mare deoarece diferenţa de drum este egală cu $2\,\text{m}$.

Să analizăm prima parabolă $\lambda \langle 800\,\text{nm}$. Abscisa x a punctului ei de intersecţie cu axa Ox este dată de:

$$\frac{2D}{x} = 2,5 \cdot 10^6 + 0,5 \approx 2,5 \cdot 10^6 \text{ de unde: } x \cong 800\,\text{nm}.$$

Pe de altă parte, parabolele trec toate prin punctul: $x = 0$, $y = \pm 6,9\,\text{m}$. Deci parabolele, foarte strânse, întorc concavitatea lor foarte puţin accentuată spre $x \langle 0$ şi sunt limitate de dimensiunea fantei (fig. 134).

Interferometrul Michelson. Condiţia de compensare

Un interferometru Michelson (fig. 135) este reglat pentru a observa inelele de interferenţă la infinit. Sursa S plasată în focarul obiectivului O reprezintă o sursă cu distribuţie uniformă şi monocromatică (λ). Presupunem că divizorul de fascicul G nu introduce nici o diferenţă de fază între cele două fascicule ale interferometrului. Se notează cu Ω punctul de întâlnire al axelor aparatului, iar D_1 şi D_2 reprezintă distanţele de la Ω la oglinzile M_1, respectiv M_2. O lamă de sticlă cu feţele plan-paralele, de grosime e şi de indice de refracţie n, este plasată în faţa oglinzii M_2.

1. - Să se calculeze diferenţa de drum dintre razele reflectate de oglinzile M_1 şi M_2 în următoarele cazuri:

a) - α) $D_2 - D_1 \ge e$; β) $D_2 - D_1 \langle e$, unde: $D_2 \rangle D_1$;

b) - $D_2 = D_1$;

c) - $D_2 \langle D_1$.

Din această analiză să se deducă o relaţie generală valabilă în toate cazurile.

R: a) - α) Pentru a calcula diferenţa de drum δ_{3-1}, se consideră traseul intermediar 2 corespunzând unei reflexii (în fapt neglijabilă) pe faţa lamei de sticlă.

Deci: $\delta_{1-2} = 2(D_2 - D_1 - e)\cos i$ şi $\delta_{2-3} = 2ne\cos r$,

prin urmare: $\delta_{1-3} = 2(D_2 - D_1 - e)\cos i + 2ne\cos r$

Dacă: $D_2 - D_1 = e$, atunci:

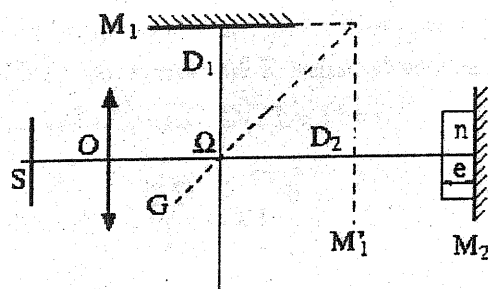


Fig. 135

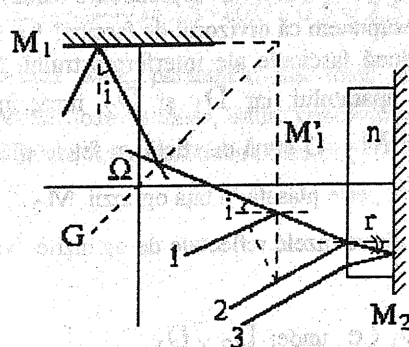
$$\delta_{1-3} = 2\,\mathrm{n}\,e\cos r$$

In acest caz, din fig. 136 rezultă că imaginea M_1' coincide cu fața a doua a lamei de sticlă.

a) - β) Dacă intervine traseul intermediar 2 (fig. 137) se obține:

$$\delta_{2-3} = 2\mathrm{n}e\cos r\,,\ \delta_{2-1} = 2[e - (D_2 - D_1)]\cos i$$

Prin urmare: $\delta_{3-1} = 2[e - (D_2 - D_1)]\cos i - 2\,\mathrm{n}\,e\cos r\,,$



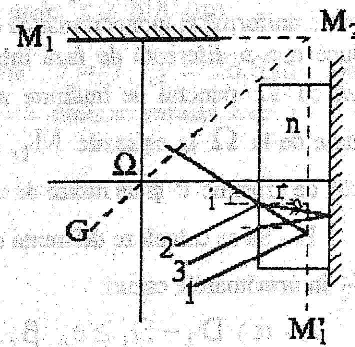


Fig. 136 Fig. 137

deci: $\delta_{1-3} = 2[D_2 - D_1 - e]\cos i + 2\mathrm{n}e\cos r\,,$

adică se obține relația din cazul precedent, dar mărimea $D_2 - D_1 - e$ este negativă.

b). $D_2 = D_1$ (fig. 138).

Trebuie stabilită relația care reprezintă diferența de drum între o rază care traversează o lamă de grosime $2e$ și o alta care este paralelă cu prima dar nu traverseză lama. Se obține:

$$\delta_{1-2} = -2e\cos i\,, \qquad \delta_{3-2} = -2e\cos r\,,$$

de unde: $\delta_{1-3} = -2e(\cos i - \mathrm{n}\cos r)$,

expresie care se regăsește dacă, în relațiile precedente, se consideră $D_2 = D_1$.

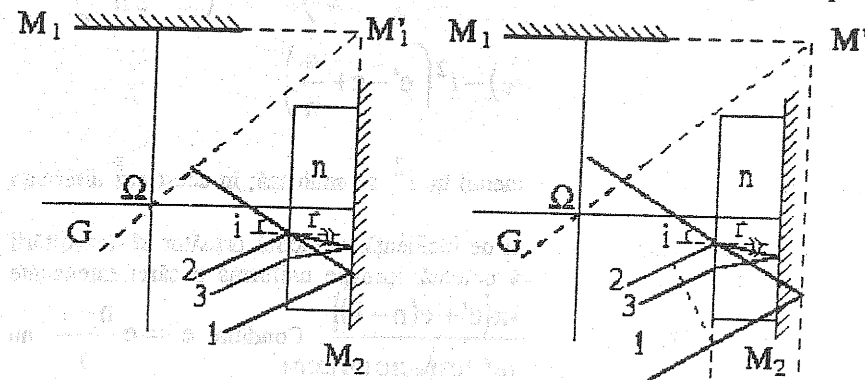


Fig. 138 Fig. 139

c). $D_2 \langle D_1$ (fig. 139)

$$\delta_{1-2} = -2[e + D_1 - D_2]\cos i\,, \quad \delta_{1-3} = -2\mathrm{n}e\cos r$$

de unde:

$$\delta_{1-3} = +2[D_2 - D_1 - e]\cos i + 2\,\mathrm{n}\,e\cos r$$

Rezultă relația:

$$\delta = 2(e' - e)\cos i + 2\mathrm{n}e\cos r\,,$$

unde: $e' = D_2 - D_1 \rangle 0$, dacă $D_2 \rangle D_1$ sau $e' = D_2 - D_1 \langle 0$, dacă: $D_2 \langle D_1$, D_2 fiind exact distanța relativă la oglinda pe care s-a plasat lama de sticlă.

2. – Să se arate că numai în cazul a) se poate alege o valoare $D_2 - D_1 = e'$ astfel încât, la infinit, inelele să fie înlocuite cu o culoare uniformă. Să se calculeze valoarea corespunzătoare a diferenței de fază φ. Să se stabilească legătura dintre mărimile e și e', dacă $\mathrm{n} = 1{,}5$.

R: Expresia diferenței de drum δ se poate dezvolta în serie funcție de unghiul de incidență i, cu limitare la termenii de ordinul al doilea:

$$\delta = 2(e' - e)\cos i + 2ne\cos r = 2(e' - e)\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) + 2ne\left(1 - \frac{i^2}{2n^2}\right) =$$

$$= 2(e' - e + ne) - i^2\left(e' - e + \frac{e}{n}\right)$$

Prin urmare dacă $e' = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, termenul în i^2 se anulează; în acest caz diferența de drum variază foarte puțin cu unghiul de incidență, termenul următor al dezvoltării fiind de ordinul patru; deci se observă o tentă aproape uniformă a cărei intensitate corespunde diferenței de fază $\varphi = \frac{4\pi[e' + e(n-1)]}{\lambda}$. Condiția $e' = e\frac{n-1}{n}$ nu poate fi realizată decât în cazul a) ($D_2 \rangle D_1$) în care sigur $e' \rangle 0$. Lama de sticlă trebuie plasată pe oglinda căreia îi corespunde cel mai lung traseu. Dacă $n = 1{,}5$ se găsește relația:

$$e' = \frac{e}{3}$$

Interferometrul Michelson.

Inele formate la infinit și observate în prezența unei lame de sticlă

Să considerăm interferometrul Michelson prezentat în fig. 140. Sursa S este punctiformă și emite radiație monocromatică; oglinzile M_1 și M_2 sunt perpendiculare între ele și dispuse la 45^0 față de lama G divizoare de fascicul; distanțele fiecăreia la punctul de întâlnire I al axelor interferometrului sunt D_1, respectiv D_2. Nu se vor considera efectele determinate de reflexia pe divizorul G și transmisia acestuia.

1. – Să se descrie și să se calculeze aspectul fenomenelor observate în planul focal F al lentilei L de distanță focală f (fig. 141) în următoarele cazuri:

a) $D_1 = D_2$;

R: Deoarece $D_1 = D_2$, în planul focal al lentilei se obține o iluminare uniformă de intensitate maximă.

b) $D_1 \neq D_2$.

R: Dacă $D_1 \neq D_2$, lama "virtuală" cu fețe paralele care se formează între oglinda M_1 și imaginea M_2' a oglinzii M_2 față de divizorul G, are grosimea:

$$e = |D_1 - D_2|.$$

Sursa fiind punctiformă, la infinit se formează inele nelocalizate. In planul focal al lentilei L (fig. 142) se observă inelele formate la infinit; în punctul M, care corespunde fasciculului de incidență i pe lama de aer echivalentă, se obține:

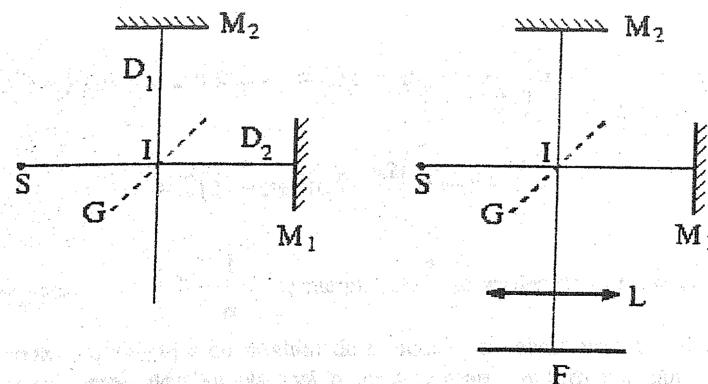


Fig. 140 Fig. 141

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e\cos i}{\lambda} = k,$$

iar pentru unghiul de incidenţă egal cu zero:

$$\frac{\delta_0}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} = k_0,$$

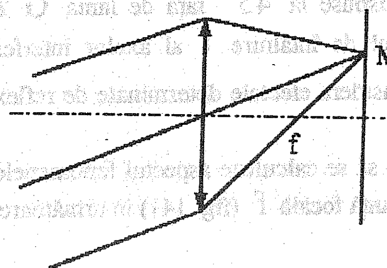


Fig. 142

De unde:

$$k_0 - k = \frac{2e}{\lambda}(1 - \cos i) \approx \frac{ei^2}{\lambda}$$

Expresia razei unghiulare a inelelor este:

$$i = \sqrt{\frac{\lambda}{e}}\sqrt{k - k_0},$$

iar în planul focal raza liniară este de forma:

$$r = f\sqrt{\frac{\lambda}{|D_1 - D_2|}}\sqrt{k - k_0}$$

2. – Să se analizeze modificările tabloului de interferenţă dacă se măresc dimensiunile sursei de radiaţie. Care este diferenţa dintre tabloul obţinut în acest caz faţă de cazul precedent.

R: Să considerăm că se măresc dimensiunile sursei.

a) $D_1 = D_2$; tabloul de interferenţă este uniform iluminat şi cu intensitate maximă, deoarece pentru orice valoare a unghiului de incidenţă i este îndeplinită condiţia:

$$\delta = |D_1 - D_2|\cos i = 0.$$

b) $D_1 \neq D_2$; inelele sunt localizate la infinit deoarece sursa este largă.

3. - Considerând sursa de radiaţie S ca fiind punctiformă, iar $D_1 = D_2$, se introduce în faţa oglinzii M_2 o lamă de sticlă cu grosimea e şi de indice de refracţie n. Să se descrie aspectul figurii de interferenţă observată pe ecranul E care coincide cu planul focal F al lentilei L de distanţă focală f (fig. 143).

Aplicaţie numerică: Să se calculeze distanţa dintre punctul F şi primul primul maxim de intensitate observat pe ecranul E dacă $n = 1{,}5$, $e = 0{,}1\,mm$, $\lambda = 500\,nm$, $f = 10\,cm$.

R: Să se analizeze propagarea razelor prezentate în fig. 5. Din cauza reflexiei pe oglinda M_2 se poate considera că o rază traversează o lamă de grosime $2e$, iar cealaltă rază nu o traversează. In aceste condiţii:

$$\delta = 2e(\cos i - n\cos r).$$

Deoarece valoarea i a unghiului de incidenţă este mică, se poate scrie, dezvoltând în serie:

Aplicaţie numerică: Să se calculeze distanţa dintre punctul F şi primul primul maxim de intensitate observat pe ecranul E dacă $n = 1{,}5$, $e = 0{,}1\,mm$, $\lambda = 500\,nm$, $f = 10\,cm$.

R: Să se analizeze propagarea razelor prezentate în fig. 144. Din cauza reflexiei pe oglinda M_2 se poate considera că o rază traversează o lamă de grosime $2e$, iar cealaltă rază nu o traversează. In aceste condiţii:

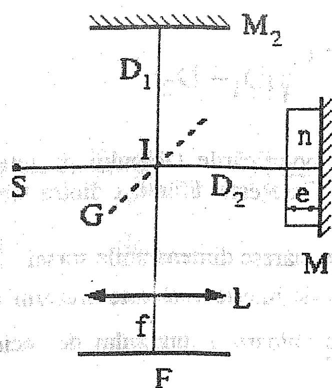


Fig. 143

$$\delta = 2e(\cos i - n\cos r).$$

Deoarece valoarea i a unghiului de incidență este mică, se poate scrie, dezvoltând în serie:

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e(n-1)}{\lambda} + \frac{e(n-1)i^2}{n\lambda} = k$$

$$\frac{\delta_0}{\lambda} = \frac{2e(n-1)}{\lambda} = k_0,$$

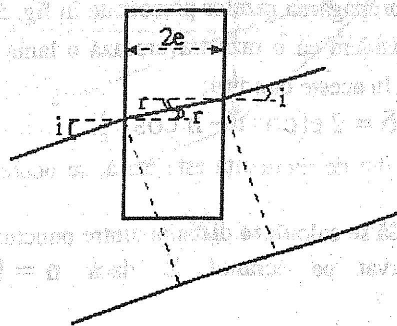


Fig. 144

de unde:

$$k - k_0 \frac{e(n-1)}{n\lambda} i^2.$$

Deci:

$$i = \sqrt{\frac{n\lambda}{e(n-1)}}\sqrt{k-k_0}.$$

Prin urmare inelele de interferență se formează la infinit și se pot observa în planul focal al lentilei L; raza lor este:

$$r = f\sqrt{\frac{n\lambda}{e(n-1)}}\sqrt{k-k_0}$$

Sursa fiind punctiformă, inelele nu sunt localizate la infinit.

Aplicație numerică: $k_0 = 200$

Pentru primul maxim $k - k_0 = 1$ iar raza acestuia este dată de:

$$r = f\sqrt{\frac{n\lambda}{e(n-1)}} = 12\,\text{mm}$$

4. – Deoarece lama de sticlă nu este perfect plană, dorim să evaluăm deformațiile ei. Să se indice cum trebuie completat montajul din fig. 140.

R: Montajul trebuie completat cu o lentilă O_1, sursa de radiație optică fiind plasată în focarul acesteia. In acest mod lama l supusă verificării este traversată de un fascicul de raze paralele, perpendicular pe aceasta. In aceste condiții, variațiile de faze sunt determinate numai de variațiile de grosime ale lamei. Obiectivul O_2 permite razelor să pătrundă în ochi, care este acomodat pe imaginea lamei l văzută prin intermediul lentilei O_2 (fig. 145).

5. - Sursa de radiație emite lumină albă. Lama de sticlă de grosime $e = 0{,}1\,\text{mm}$, este considerată perfectă și plasată în montajul precedent ($D_1 = D_2$). Fasciculul de raze paralele care emerge din interferometru este incident pe fanta unui spectrograf. Să se determine valorile λ_1, λ_2, λ_3 ale celor mai mici lungimi de undă care formează trei caneluri strălucitoare succesive în domeniul vizibil $(400 \le \lambda \le 800)\text{nm}$. Să se stabilească numărul total de caneluri în acest domeniu. (Se va considera că indicele de refracție al lamei nu depinde de lungimea de undă.)

R: Incidența fiind normală, diferența de drum optic este:

$$\delta = \delta_0 = 2e(n-1);$$

pentru $\lambda = 400\,\text{nm}$, se obține: $\dfrac{\delta_0}{\lambda} = 250$;

pentru $\lambda = 800\,\text{nm}$, se obține: $\dfrac{\delta_0}{\lambda} = 125$.

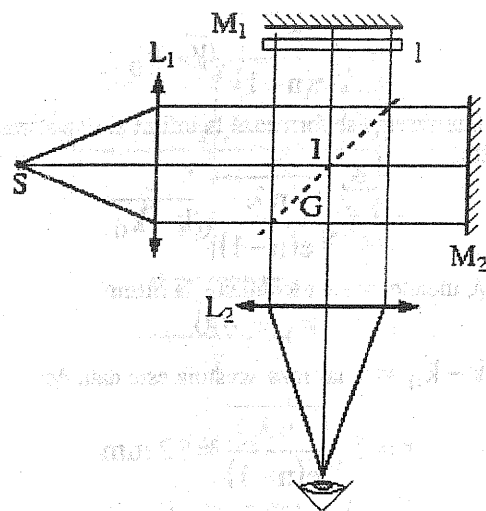


Fig. 145

Numărul de caneluri luminoase este: $125+1=126$

Lungimile de undă λ_1, λ_2, λ_3 solicitate de problemă sunt:

$$\lambda_1 = 400\,\text{nm},\ \lambda_2 = \frac{\delta_0}{249} = 401{,}6\,\text{nm},\ \lambda_3 = \frac{\delta_0}{248} = 403{,}2\,\text{nm}$$

Studiul unui strat dielectric. Reflexii multiple

Se consideră un strat dielectric de substanță cu indice de refracție n_1, care acoperă un suport cu indice n_2. Indicele de refracție al mediului exterior este egal cu n_0 (fig. 146). Notăm cu r_1 și t_1, r_2 și t_2 amplitudinile oscilațiilor reflectate și transmise pentru fiecare suprafață de separație, radiația propagându-se din mediul cu indice n_0 spre mediul cu indice n_2. (Se notează cu r_1' și t_1', r_2' și t_2' aceste amplitudini pentru sensul de propagare invers). Mărimile R_1' și T_1', R_2' și T_2' reprezintă factorii de reflexie și de transmisie corespunzători.

1. - Să se calculeze expresiile mărimilor r_2, t_2 și t_2', incidența fiind normală și ale mărimilor R_2 și T_2 incidența fiind normală și oarecare.

Să se stabilească relația ce există între mărimile r_2 și t_2:

a) - Dacă incidența este oarecare;
b) - Dacă aceasta este normală.

Să se verifice existența relației: $t_2 \cdot t_2' = 1 - r_2^{\,2}$.

R: $r_2 = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$, $t_2 = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}$, $t_2' = \dfrac{2n_2}{n_1 + n_2}$

$$R^2 = r_2^2$$

n_0

n_1

n_2

Fig. 146

Incidență oarecare: $T_2 = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} t_2^2$

Incidență normală: $T_2 = \frac{n_2}{n_1} t_2^2$

a) $r_2^2 + \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} t_2^2 = 1$, deoarece $R + T = 1$;

b) $r_2^2 + \frac{n_2}{n_1} t_2^2 = 1, \quad t_2 t_2' = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 - r_2^2$

2. - Se consideră incidența normală. Considerând reflexiile multiple să se calculeze amplitudinea transmisă; pentru ansamblul de straturi să se calculeze factorii de transmisie T și de reflexie R.

R: Expresia amplitudinii câmpului transmis A_t este:

$$A_t = t_1 t_2 \left(1 + r_1 r_2 e^{i\varphi} + \cdots\right) = \frac{t_1 t_2}{1 + r_1 r_2 e^{i\varphi}},$$

deoarece: $r_1' = -r_1$.

Factorul de transmisie T este egal cu $|A_t|^2$ multiplicat cu raportul $\frac{n_2}{n_0}$:

$$T = \frac{n_2}{n_0} \times \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\varphi}.$$

Se poate scrie: $T = \frac{\frac{n_2}{n_1} t_2^2 \times \frac{n_1}{n_0} t_1^2}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\varphi} = \frac{\left(1 - r_1^2\right)\left(1 - r_2^2\right)}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\varphi},$

de unde: $R = 1 - T = \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\varphi}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\varphi}.$

3. - Să se calculeze expresia factorului de transmisie T, considerând $n_0 = n_2$.

R: Dacă: $n_0 = n_2$,

$$r_2 = -r_1 = \sqrt{R} = \sqrt{1 + T},$$

prin urmare:

$$T = \frac{\tau^2}{1 + R^2 - 2R\cos\varphi} = \frac{\tau^2}{(1 - R)^2 + 2R(1 - \cos\varphi)} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2\varphi}$$

Acesta expresie reprezintă factorul de transmisie Fabry-Perot.

Rețea de difracție prin reflexie.

Rețeaua de difracție R, care funcționează prin reflexie, a cărei profilul este prezentat în fig. 147 (p reprezintă perioada rețelei, ε grosimea părților în relief, iar N numărul de linii în relief (sau scobite) ale rețelei), este iluminată de un fascicul de raze paralele (de o undă plană) incident pe rețea sub unghiul de incidență i.

Pentru această rețea să se calculeze valoarea intensității difractate la infinit în direcția caracterizată de unghiul θ. Se va analiza cazul în care lărgimea a a liniilor în relief este egală cu lărgimea b a liniilor scobite.

Să se reprezinte grafic variația intensității pentru cazul $\varepsilon = (2k+1)\dfrac{\lambda}{4}$.

R: Amplitudinea radiației difractate de către o trăsătură reflectantă de lărgime a a rețelei de înălțime l, unde: $a \rangle\rangle l$, este dată de relația:

$$A_a = al\frac{\sin\dfrac{\pi(\sin i \pm \sin\theta)a}{\lambda}}{\dfrac{\pi(\sin i \pm \sin\theta)a}{\lambda}},$$

iar pentru o trăsătură de lărgime b de relația:

$$A_b = bl\frac{\sin\dfrac{\pi(\sin i \pm \sin\theta)b}{\lambda}}{\dfrac{\pi(\sin i \pm \sin\theta)b}{\lambda}},$$

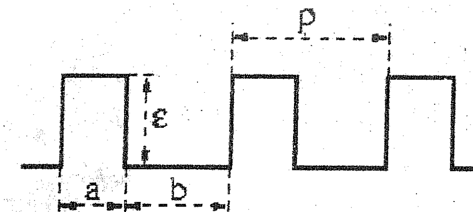


Fig. 147

unde semnul $(+)$ se referă la cazul când fasciculul incident, respectiv cel difractat sunt de aceeași parte a normalei la rețea, iar semnul $(-)$ dacă acestea sunt de o parte și de alta a normalei. Amplitudinile fiind reale au aceeași fază, respectiv faza de origine, care corespunde oscilațiilor reflectate în punctele I și J (fig. 148, 149). Dacă p reprezintă perioada rețelei, valoarea amplitudinii câmpului la infinit este:

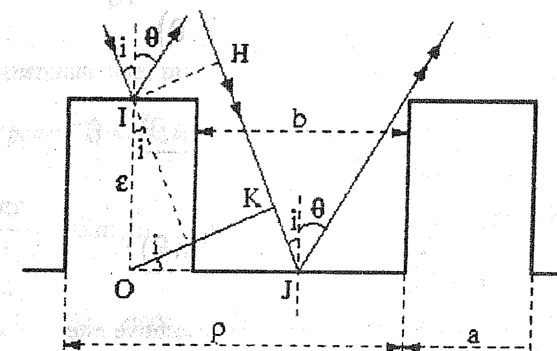


Fig. 148

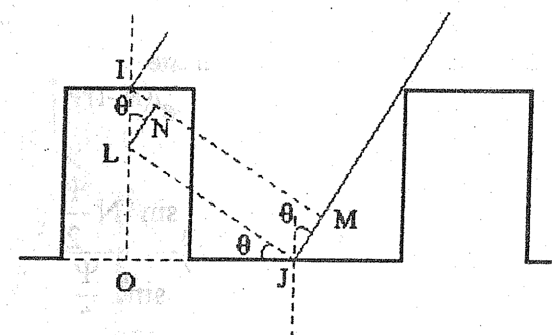


Fig. 149

$$A_a + A_b e^{i\varphi},$$

unde: $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$, în care $\delta = HJ \mp JM$ (fig. 148, 149).

$$HJ = HK + KJ = \varepsilon \cos i + \frac{a+b}{2} \sin i,$$

$$JM = (OI - OL)\cos\theta = \varepsilon \cos i - \frac{a+b}{2} \sin\theta,$$

$$\delta = 2\varepsilon + \frac{p}{2}(\sin i - \sin\theta).$$

Dacă razele incidente şi reflectate sunt dispuse de aceeaşi parte a normalei, se obţine:

$$\delta = 2\varepsilon - \frac{p}{2}(\sin i + \sin\theta),$$

de unde:

$$\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda} - \frac{\pi p(\sin i + \sin\theta)}{\lambda}$$

În cazul general se poate scrie:

$$\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda} \pm \frac{\pi p(\sin i \mp \sin\theta)}{\lambda}.$$

Diferenţa de fază corespunzătoare la două trăsături consecutive este:

$$\Psi = \frac{2\pi p(\sin i \mp \sin\theta)}{\lambda}.$$

Amplitudinea câmpului la infinit difractat de către reţea este:

$$A = \left(A_a + A_b e^{i\varphi}\right)\left[1 + e^{i\Psi} + \cdots e^{i(N-1)\Psi}\right]$$

respectiv valoarea intensităţii I:

$$I = \left(A_a^2 + A_b^2 + 2A_a A_b \cos\varphi\right)\frac{\sin^2 N\frac{\Psi}{2}}{\sin^2\frac{\Psi}{2}}$$

Dacă: $$a = b = \frac{p}{2},$$

$$I = 2A^2(1+\cos\varphi)\frac{\sin^2 N\frac{\Psi}{2}}{\sin^2\frac{\Psi}{2}},$$

unde: $\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda} \pm \frac{\pi p(\sin i \mp \sin\theta)}{\lambda}$ şi $\frac{\Psi}{2} = \frac{\pi p(\sin i \mp \sin\theta)}{\lambda}$,

iar valoarea unghiului i este constantă.

Dacă se cosideră $i = 0$, se obţine:

$$I = \underbrace{2a^2 l^2\left[1+\cos\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\lambda} \pm \frac{\pi p\sin\theta}{\lambda}\right)\right]}_{(1)}\underbrace{\left(\frac{\sin^2\frac{\pi p\sin\theta}{2\lambda}}{\frac{\pi p\sin\theta}{2\lambda}}\right)^2\left(\frac{\sin^2\frac{N\pi p\sin\theta}{\lambda}}{\frac{N\pi p\sin\theta}{\lambda}}\right)^2}_{(2)}$$

Factorul (1) corespunde unei modulări sinusoidale a semnalului cu perioada unghiulară $\frac{2\lambda}{p}$ decalată (pentru $\theta = 0$ această expresie nu poate avea valoare maximă din cauza defazajului $\frac{4\pi\varepsilon}{\lambda}$). Factorul (2) descrie figura de difracţie determinată de o singură fantă $(a = \frac{p}{2})$. Se evidenţiază numai maximele de ordin impar; dacă $\varepsilon = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ maximul de ordin zero se anulează şi se observă maximele de ordin impar (fig. 150).

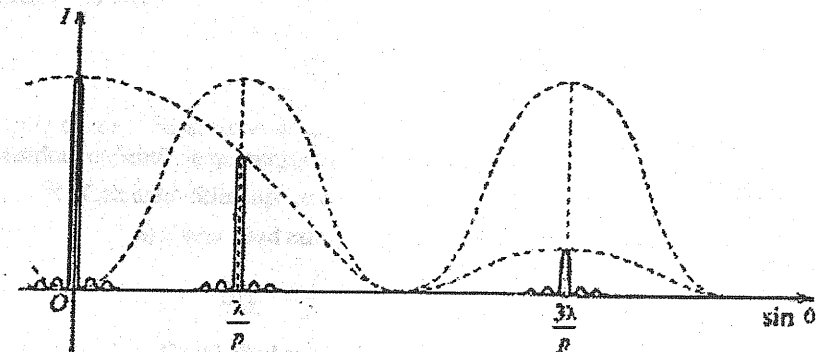


Fig. 150

Dacă $i \neq 0$, în relația intensității se înlocuiește mărimea $\sin\theta$ prin ($\sin i \pm \sin\theta$) iar maximele se obțin pentru ($\sin\theta = \frac{\lambda}{p} \pm \sin i$).

Rețea de difracție tip rețea de fază.

Se consideră că rețeaua de difracție din problema precedentă, transparentă și confecționată din sticlă cu indice de refracție n (rețea de fază), este iluminată de un fascicul de raze paralele (de o undă plană); se consideră $a = b$ și $\varepsilon \ll \lambda$.

Să se calculeze amplitudinea maximelor de difracție de la infinit; să se determine amplitudinea maximelor spectrului de difracție observat în planul focal-imagine al unei lentile L_1, rețeaua fiind plasată în planul focal-obiect al acestei lentile (fig. 152).

Imaginea nu poate fi observată în planul focal al unei lentile L_2 (Se consideră că lentilele L_1 și L_2 au aceeași distanță focală F). Să se explice acest fapt arătând că valoarea vizibilității:

$$\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

este egală cu zero. Să se arate de ce contrastul de fază face să se observe o imagine. Se va considera că lentilele nu micșorează deschiderea fasciculelor.

R: Calculăm diferența de drum δ_{OJ} (fig. 151).

a) Cazul când razele sunt dispuse de o parte și de alta a normalei:

$$\delta_{OJ} = \frac{p}{2}(\sin i - \sin\theta) + \varepsilon(n-1).$$

b) Cazul când razele sunt dispuse de o singură parte a normalei:

$$\delta_{OJ} = \frac{p}{2}(\sin i + \sin\theta) + \varepsilon(n-1).$$

Se obține:

$$\varphi_{OJ} = \frac{\pi p \nu}{\lambda} + \varphi,$$

unde: $\nu = \sin i \pm \sin\theta$ și $\varphi = \dfrac{2\pi\varepsilon(n-1)}{\lambda}$.

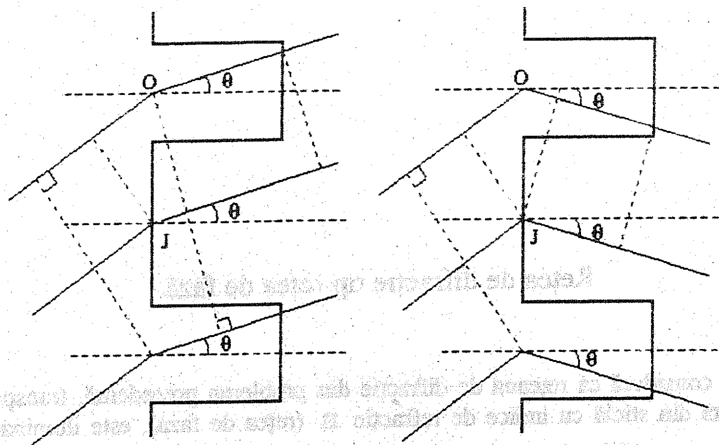


Fig. 151

Amplitudinea câmpului difractat la infinit este:

$$A = al\frac{\sin\frac{\pi\nu p}{2\lambda}}{\frac{\pi\nu p}{2\lambda}}\left(1 + e^{i\left(\frac{\pi\nu p}{\lambda}+\varphi\right)}\right)\left(1 + e^{i\Psi} + \dots + e^{i(N-1)\Psi}\right),$$

unde:

$$\Psi = \frac{2\pi p(\sin i \pm \sin\theta)}{\lambda},$$

deci:

$$A = 2al\cos\left(\frac{\pi\nu p}{2\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\sin\frac{\pi\nu p}{2\lambda}}{\frac{\pi\nu p}{2\lambda}}\cdot\frac{\sin\frac{N\pi\nu p}{\lambda}}{\sin\frac{\pi\nu p}{\lambda}}e^{i\frac{\varphi}{2}},$$

unde l reprezintă lungimea unei trăsături a rețelei.

Maximele de difracție se obțin pentru $\nu = \pm\frac{k\lambda}{p}$; deoarece $a = b$ (creneluri), maximele de ordin par sunt nule $k = 2n+1$, de unde:

$$A = 2Nal\cos\left[\frac{\varphi}{2} \pm (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}.$$

In planul focal al lentilei L_1, se înregistrează imagini punctiforme cărora le corespund amplitudinile (până la un factor) date de relațiile:

$$A_0 = Nal\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad A_{\pm1} = \mp 2Nal\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$A_{\pm3} = \mp\frac{1}{3}\frac{2}{\pi}Nal\sin\frac{\varphi}{2}, \qquad A_{\pm5} = \mp\frac{1}{5}\frac{2}{\pi}Nal\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Considerând $i = 0$, în planul focal al lentilei L_1 distanța A_0A_1 este egală cu: $F\nu = F\sin\theta$. Deoarece $\sin\theta = \frac{\lambda}{p}$, se obține: $A_0A_1 = \frac{F\lambda}{p}$.

La infinit, acestor imagini punctiforme, care reprezintă surse corente, le corespunde amplitudinea A' (fig. 152); pentru A_0 și A_1 diferența de drum în direcția θ' este:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{F\lambda}{p}\cdot\sin\theta' = \frac{2\pi x'}{p}, \text{ deoarece: } \sin\theta' \cong \frac{x'}{F'}.$$

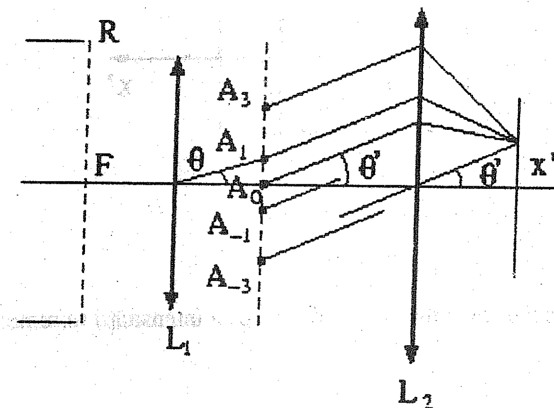


Fig. 152

Prin urmare franjele de interferență sunt acromate. In planul focal al lentilei L_2, până la un factor de forma Nal, valoarea amplitudinii este:

$$A' = \cos\frac{\varphi}{2} + \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\pi}\left(e^{i\Phi} - e^{-i\Phi}\right) + $$

$$+ \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{3\pi}\left(e^{3i\Phi} - e^{-3i\Phi}\right) + \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{5\pi}\left(e^{5i\Phi} - e^{-5i\Phi}\right) + \ldots$$

de unde:

$$A' = \cos\frac{\varphi}{2} -$$

$$- e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi x'}{p} + \frac{1}{3}\sin 2\pi\frac{3x'}{p} + \frac{1}{5}\sin 2\pi\frac{5x'}{p} + \cdots\right)$$

expresie ce poate fi scrisă sub forma:

$$A' = \cos\frac{\varphi}{2} - e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}Cr(x').$$

Intensitatea determinată de aceste două vibrații în cuadratură este:

$$I' = \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}[Cr(x')]^2,$$

însă funcția $Cr(x')$ este egală cu ± 1 (fig. 153).

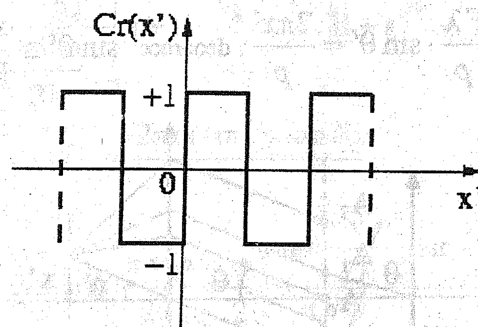


Fig. 153

Valoarea intensității maxime este egală cu cea a intensității minime:

$$I_{max} = I_{min} = \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2} = 1,$$

deci contrastul $\gamma = 0$.

Contrastul de fază se obține plasând o lamă de fază pe traseul vibrației A_0, astfel încât A_0 să devină $A_0 e^{i\frac{\pi}{2}}$. Unghiul de defazare φ fiind mic, se poate scrie:

$$A' = e^{i\frac{\pi}{2}}\left[1 - \frac{\varphi}{2}Cr(x')\right].$$

Dacă se neglijează valoarea termenului φ^2, expresia intensității devine:

$$I' \cong 1 - \varphi Cr(x')$$

Deoarece: $I'_{max} \approx 1 + \varphi$ și $I'_{min} \approx 1 - \varphi$, se obține:

$$\gamma \cong 2\varphi,$$

adică valoarea contrastului este diferită de zero și ca rezultat se poate forma imaginea.

Experienţa lui Abbe.

O reţea R de amplitudine (lărgimea trăsăturilor opace este egală cu cea a trăsăturilor transparente) este iluminată normal de un fascicul de raze paralele (undă plană). Reţeaua este dispusă în planul focal al lentilei L_1 de distanţă focală F. Dacă se formează spectrul de difracţie al reţelei în planul focal al imaginii lui L_1, să se arate că imaginea reţelei se poate observa la infinit. Ce se observă dacă reţeaua R se îndepărtează de lentila L_2?

R: In planul focal al lui L_1, se observă surse punctiforme cărora le corespund amplitudinile (fig.154):

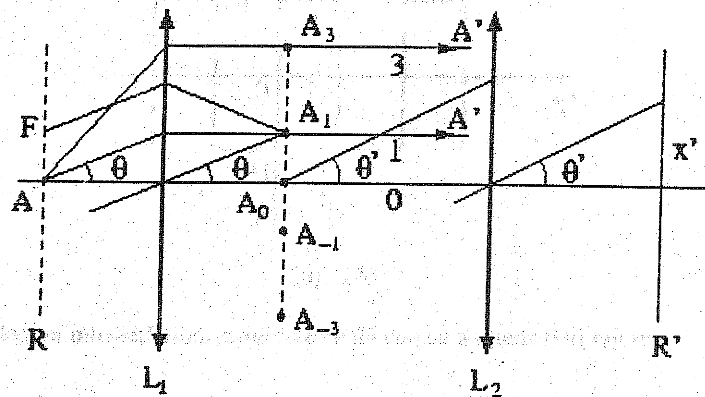


Fig. 154

$$A_0 = 1, \quad A_{\pm 1} = +\frac{2}{\pi}, \quad A_{\pm 3} = -\frac{2}{3\pi}, \ldots$$

Imaginea A' a lui A fiind la infinit, maximele spectrului notate A_0, A_1, A_3,..., care au aceeaşi fază ca oscilaţiile razelor 0, 1, 3,... (transformata Fourier a funcţiei pare $R(x)$ fiind reală, amplitudinile sunt reale) sunt deci în fază. Ca şi în cazul problemei precedente observarea se efectuează în planul focal al lentilei L_2 a cărei distanţă focală este egală cu cea a lentilei L_1; de această dată valoarea amplitudinii este:

$$A' = 1 + \frac{2}{\pi}\left(e^{i\Phi} + e^{-i\Phi}\right) - \frac{2}{3\pi}\left(e^{3i\Phi} + e^{-3i\Phi}\right) + \ldots,$$

unde: $\Phi = \dfrac{2\pi F}{p\lambda}\lambda \sin\theta' = \dfrac{2\pi x'}{p}$, de unde se obţine:

$$A' = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\cos 2\pi\frac{x'}{p} - \frac{1}{3}\cos 2\pi\frac{3x'}{p} + \frac{1}{5}\cos\frac{3x'}{p} + \ldots\right) = R(x'),$$

$$I = \left[R(x')\right]^2$$

In acest mod se regăseşte imaginea reţelei, intensitatea fiind nulă sau egală cu 4.

Dacă reţeaua R este deplasată (fig. 155), oscilaţiile A_0, A_1, A_3,..., nu mai sunt în fază, iar suprafaţa de undă pentru razele 0, 1, 3,..., este sfera de rază A', imaginea lui A. Imaginea reţelei R' se va forma la nivelul lui A', unde, prin reglarea dispzitivului, variaţiile de fază sunt compensate.

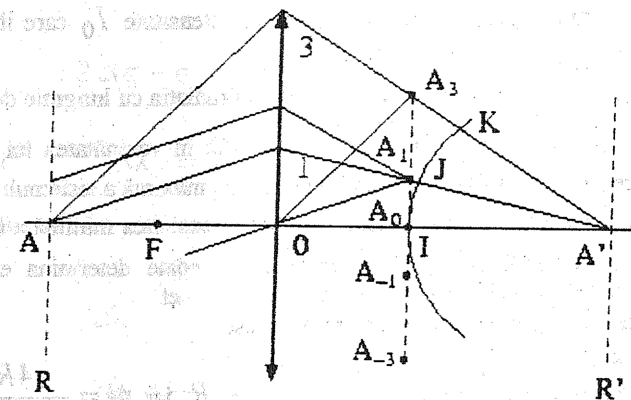


Fig. 155

Interferometrul Fabry–Perot.

Analiza structurii spectrale a radiației optice.

Notăm prin R factorul de reflexie al lamelor unui interferometru Fabry-Perot care sunt distanțate între ele cu $e = 2{,}5\,\text{mm}$. Valoarea mare a factorului de reflexie R este obținută prin realizarea de straturi multiple dielectrice. Se consideră λ_0 lungimea de undă a unui fascicul de radiație optică de intensitate I_0 care iluminează interferometrul.

a). Pentru ce valoare a lui R poate fi observată radiația cu lungime de undă λ a cărei intensitate este egală cu $3\cdot 10^{-3} I_0$ (λ se află în vecinătatea lui λ_0). Se admite că observarea este posibilă atunci când intensitatea maximă a sistemului de inele corespunzător radiației λ este mai mare decât $1/5$ din intensitatea minimă a sistemului de inele corespunzător radiației λ_0. Să se arate că se poate determina excedentul fracționar al centrului măsurând raza unghiulară a primului inel.

R: Intensitatea transmisă prin interferometru este:

$$I = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + m\sin^2\frac{\varphi}{2}}, \text{ unde: } T = 1 - R, \text{ iar } m = \frac{4R}{(1-R)^2}.$$

Valoarea intensității maxime este: $I_{max} = I_0$, iar a celei minime:

$$I_{min} = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1+R)^2}.$$

Problema solicită condiția:

$$I = 3\cdot 10^{-3} I_0 = \frac{I_0}{5}\frac{(1-R)^2}{(1+R)^2},$$

de unde: $$\frac{(1-R)^2}{(1+R)^2} = 0{,}015, \text{ respectiv: } R = 0{,}78.$$

Pentru primul inel de interferență se obține:

$$p = \frac{2e\cos i}{\lambda} = k_1,$$

iar în centru: $$p_0 = \frac{2e}{\lambda} = k_1 + \varepsilon$$

b) Să se calculeze intervalul între ordinele de interferență pentru $i = 0$, adică intervalul spectral ($\Delta\sigma_0$) exprimat în numere de undă, (respectiv $\Delta\lambda_0$ exprimat în lungimi de undă) corespunzând unei variații egală cu unitatea a ordinului de interferență p_0. Să se exprime în funcție de factorul de finețe F și de ($\Delta\lambda_0$) cel mai mic interval spectral care poate fi determinat de interferometru și să se calculeze valoarea acestuia.

R: $$p_0 = \frac{2e}{\lambda_0},\quad p_0 + 1 = \frac{2e}{\lambda}, \text{ de unde:}$$

$$2e(\sigma - \sigma_0) = 1,\quad (\Delta\sigma)_0 = \frac{1}{2e} = 2\,\text{cm}^{-1}.$$

In același mod: $$\Delta\lambda_0 = \lambda_0^2 \Delta\sigma_0 = \frac{0{,}25\cdot 2}{10^4} = 0{,}5\ \text{Å}.$$

Pe de altă parte:

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{2ne}{\lambda}F, \text{ unde: } F = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = 12{,}7,$$

deci: $$d\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2neF} = \frac{\Delta\lambda_0}{F} = \frac{0{,}5}{12{,}7} = 0{,}04\ \text{Å}$$

c) Intervalul spectral $\lambda - \lambda_0$ este de ordinul $0{,}1$Å. Măsurătorile asupra excedentului fracţionar în centru dau pentru λ_0 valoarea $\varepsilon_0 = 0{,}65 \pm 0{,}01$, iar pentru λ valoarea $\varepsilon_0 = 0{,}54 \pm 0{,}01$. Ştiind că $\lambda_0 = 5460{,}74$ Å, să se determine valoarea λ.

R: In centru, pentru λ_0: $p_0 = \dfrac{2\,ne}{\lambda_0} = k_1 + \varepsilon_0$,

iar pentru λ:
$$p = \frac{2\,ne}{\lambda} = k_1 + \varepsilon$$

dar: $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{d\lambda}{\lambda} = \lambda_0 \dfrac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2e}$, de unde: $d\lambda = -\dfrac{\lambda_0^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2e} = 0{,}06$ Å.

$$\lambda = \lambda_0 + d\lambda = (5460 \pm 0{,}02)\text{Å}.$$

Eroarea asupra mărimii $d\lambda$, respectiv λ_0, este $0{,}01$ Å, deci eroarea asupra lui λ este $0{,}02$ Å.

Prin urmare: $p_0 - p = \dfrac{e\,i^2}{\lambda} = \varepsilon$, unde mărimea ε reprezintă excedentul fracţionar:

$$\varepsilon = \frac{e\,i^2}{\lambda}.$$

Efectul Doppler

O sursă punctiformă S, care emite radiaţie optică de lungime de undă λ_0, este dispusă în focarul F al unei lentile L. După traversarea lentilei, razele se reflectă pe oglinda (M) dispusă perpendicular pe axa optică. Să se determine poziţia imaginii reflectate de oglinda (M) şi variaţia lungimii de undă în următoarele două cazuri:

a) Oglinda (M) se deplasează cu viteza **v**, perpendicular pe axa optică.

R: a) - Problema se poate analiza în două moduri:

1) - Razele emergente din sursa S şi reflectate de oglinda (M) par a proveni de la sursa imobilă S′ care emite radiaţie optică de lungime de undă λ_0. Deci în planul focal al lentilei L nu se observă o deplasare a imaginii şi nici o variaţie a lungimii de undă.

2) - Problema se poate analiza aplicând legătura dintre unghiuri şi lungimea de undă în sistemul de referinţă fix şi cel mobil legat la oglindă:

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}, \qquad \lambda = \frac{\lambda'\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

unde θ, respectiv θ' reprezintă unghiurile formate de vectorul viteză **v** cu vectorii de undă (unde vectorii **u** şi **u′** sunt dirijaţi în sensul propagării radiaţiei optice (fig. 156, 157, mărimea $\theta - \theta'$ reprezintă aberaţia).

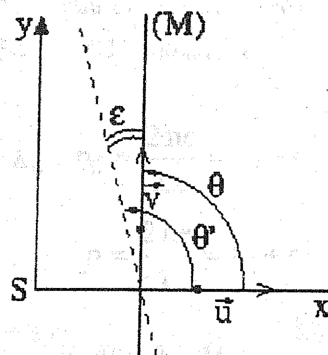


Fig. 156

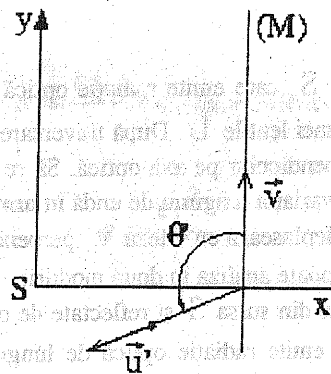


Fig. 157

Aceste relații se obțin dacă se exprimă elongația oscilației: $a\cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{c}\right)$ în sistemul mobil prin intermediul coordonatelor x' și t'; avem $x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $y'=y$ și $t'=\frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, unde x, y, x', y' sunt coordonatele observatorului în sistemul de referință fix, respectiv cel mobil; elongația în sistemul mobil este de forma: $a\cos 2\pi\nu'\left(t'-\frac{x'\cos\theta'+y'\sin\theta'}{c}\right)$ și prin identificarea fazelor se obțin relațiile de mai sus.

α) Sursa S este fixă iar observatorul legat de oglinda M se deplasează cu viteza v. In acest caz se obține (fig. 156):

$$\theta=\frac{\pi}{2}, \text{ deci: } \cos\theta'=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)=-\frac{v}{c},\ \varepsilon\approx\frac{v}{c},\ \lambda'=\lambda_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

β) Deoarece oglinda M retransmite radiația optică spre sistemul fix, aceasta poate fi considerată ca o sursă mobilă care se deplasează cu viteza v și emite un fascicul cu lungimea de undă λ', înclinat sub un unghi ε; în acest caz unghiul θ' este cel indicat în fig. 157, iar vectorul de undă este orientat după direcția u'. Se obține:

$$\cos\theta'=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)=-\frac{v}{c}=\frac{\cos\theta-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta},$$

de unde rezultă: $\cos\theta=0$, adică: $\theta=\frac{\pi}{2}$,

iar relația: $\lambda=\lambda'\frac{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ conduce la:

$$\lambda=\frac{\lambda'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\lambda_0, \text{ deoarece: } \lambda'=\lambda_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Rezultă că nu apare o deplasare de imagine și nici o variație a lungimii de undă.

b) Oglinda (M) se deplasează cu viteza v, în sensul axei optice.

R: Asemănător cu cazul precedent, problema poate fi analizată în două moduri; presupunem că oglinda se îndepărtează de sursa S.

1) Viteza imaginii virtuale S' de unde par să provină razele este $2\mathrm{v}$. Deoarece:

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta \dfrac{2\mathrm{v}}{c}}{1-\dfrac{2\mathrm{v}}{c}\cos\theta},\ \cos\theta = -1, \text{ deci } \theta = \pi.$$

Fiindcă $\theta' = \pi$ (fig. 158) şi $\lambda = \lambda' \dfrac{1+\dfrac{2\mathrm{v}}{c}}{\sqrt{1+\dfrac{4\mathrm{v}^2}{c^2}}}$, unde $\lambda' = \lambda_0$,

neglijând termenii în $\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}$, se obţine: $\lambda = \lambda_0\left(1+\dfrac{2\mathrm{v}}{c}\right)$,

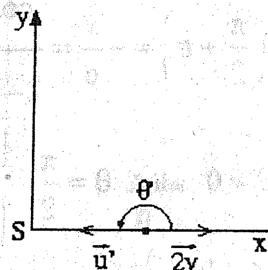


Fig. 158

adică nu apare o deplasare de imagine, ci numai o variaţie a lungimii de undă spre roşu:

$$\Delta\lambda = 2\lambda_0 \frac{\mathrm{v}}{c} \quad (S' \text{ se îndepărtează de } S)$$

2) Al doile mod de analiză:

α) Sursa S este fixă iar observatorul legat la oglinda (M) se deplasează cu viteza **v** :

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \dfrac{\mathrm{v}}{c}}{1-\dfrac{\mathrm{v}}{c}\cos\theta}, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda'\left(1-\dfrac{\mathrm{v}}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$$

Deoarece $\theta = 0$ (fig. 159), se obţine $\cos\theta' = 1$ şi $\theta' = 0$,

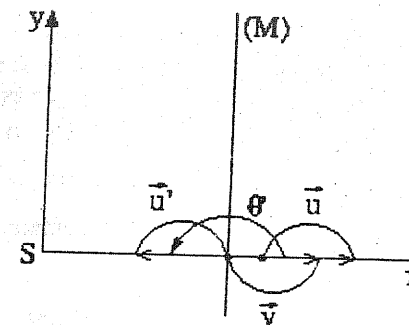


Fig. 159

prin urmare
$$\lambda' = \lambda_0 \frac{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}{1-\dfrac{\mathrm{v}}{c}}.$$

β) Oglinda (M) care reflectă razele reprezintă o sursă mobilă care se deplasează cu viteza **v** emiţând radiaţii de lungime de undă λ' spre sistemul fix. In acest caz $\theta' = \pi$ (fig. 159), deci $\cos\theta = -1$ iar $\theta = \pi$.
Deci nu se observă deplasarea imaginii în sistemul fix, însă:

$$\lambda = \lambda' \frac{1+\dfrac{\mathrm{v}}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = \lambda_0 \frac{1+\dfrac{\mathrm{v}}{c}}{1-\dfrac{\mathrm{v}}{c}} \approx \lambda_0\left(1+\frac{2\mathrm{v}}{c}\right).$$

In acest mod se regăseşte: $\Delta\lambda \approx 2\lambda_0 \dfrac{\mathrm{v}}{c}$

Prisma lui Wollaston

Un fascicul de raze paralele este incident normal pe prima față a blocului prismatic Wollaston (fig. 160). Să se arate că unghiul β format de raza ordinară cu cea extraordinară emergentă din bloc este dat de relația:

$$\beta = 2(n_e - n_o)\tan\alpha,$$

unde α reprezintă unghiul de deschidere a prismei indicat în fig. 160.

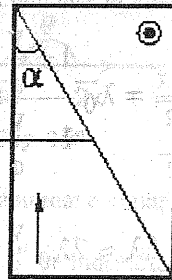


Fig. 160

R: Reamintim că radiația optică naturală poate fi descompusă în două oscilații rectangulare incoerente.

Presupune că mediul anizotrop este uniax pozitiv ($n_e \rangle n_o$), de ex. cuarț, și construim raze refractate utilizând suprafața indicilor de refracție. Construcția razelor este simplificată deoarece normalele (obținute în a doua prismă prin secțiuni circulare ale suprafeței indicilor de refracție) și razele sunt confundate. Deoarece axele optice sunt încrucișate, oscilația extraordinară din prima prismă (proiecția axei pe planul undei) devine ordinară în a doua prismă și invers. Legea lui Descartes care se aplică normalelor, în acest caz se aplică și razelor, prin urmare, cu notațiile indicate în fig. 161, se poate scrie (prima rază nu este dedublată):

a) $n_e \sin\alpha = n_o \sin(\alpha + i_o)$, $\quad n_o \sin i_o = \sin I_o$

b) $n_o \sin\alpha = n_e \sin(\alpha - i_e)$, $\quad n_e \sin i_e = \sin I_e$.

Deoarece valoarea unghiurilor i_o, i_e este mică, se poate considera $\cos i_o = \cos i_e \cong 1$, de unde:

$$(n_e - n_o)\sin\alpha = n_o \sin i_o \cos\alpha = \sin I_o \cos\alpha$$

$$(n_o - n_e)\sin\alpha = -n_e \sin i_e \cos\alpha = -\sin I_e \cos\alpha$$

$$\sin I_o = \sin I_e = (n_e - n_o)\tan\alpha$$

$$\beta = I_o + I_e = 2(n_e - n_o)\tan\alpha$$

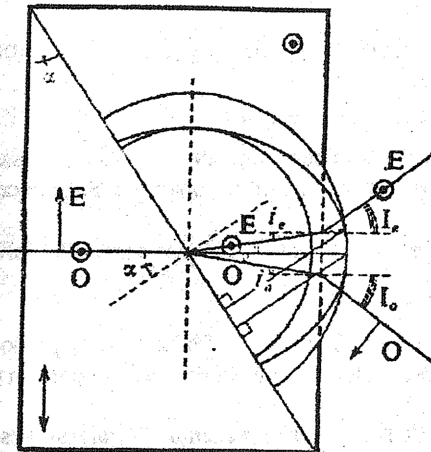


Fig. 161

Obturarea unui fascicul de radiație optică

Să considerăm o deschidere circulară a cărei rază este egală cu R. Centrul acestei deschideri este obturat cu un ecran opac circular concentric de rază r, unde $\frac{r}{R} = 0{,}1$. Să se calculeze micșorarea iluminării relative la infinit, în centrul tabloului de difracție.

R: Amplitudinea câmpului difractat este proporțională cu suprafața deschiderii. Prin urmare, până la un factor de proporționalitate, iluminarea fără obturator este egală cu $\left(\pi R^2\right)^2$ iar în prezența obturatorului este $\left(\pi R^2 - \pi r^2\right)^2$.

Micșorarea iluminării relative este:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\pi[(R^2)^2 - (R^2 - r^2)^2]}{\pi^2 (R^2)^2} = \frac{2r^2}{R^2} - \frac{r^4}{R^4}.$$

Deoarece $\frac{r}{R} = 0{,}1$, se obține:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2r^2}{R^2} - \frac{r^4}{R^4} \approx \frac{2r^2}{R^2} = 0{,}02$$

Funcția de transfer a unui sistem optic

Se realizează experiența lui Young conform montajului din fig. 162, unde O_1 și O_2 sunt două lentile identice cu distanța focală F, iar F_1 și F_2 reprezintă două fante situate la distanța l; fanta-sursă f, de lărgime s, este dispusă în planul focal al lentilei O_1 iar ecranul E se află în planul focal al lentilei O_2. Sistemul este iluminat cu radiație monocromatică de lungime de undă λ.

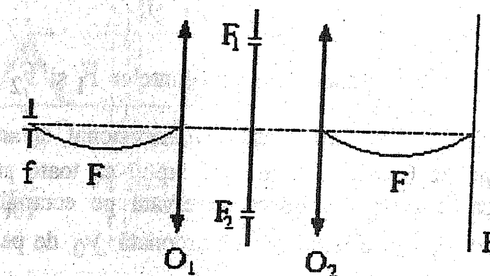


Fig. 162

Să se analizeze fenomenul considerând că ansamblul compus din lentilele O_1 și O_2, respectiv fantele F_1, F_2 reprezintă un sistem optic S care formează imaginea fantei-sursă pe ecranul E.

a) Să se determine funcția de transfer $d(\mu)$ a sistemului S, unde fantele F_1 și F_2 sunt identice și au aceeași lărgime a.

R: Imaginea unui punct M luminos al fantei-sursă, formată de sistemul S, are forma unei linii fine modulată în iluminare, centrată pe imaginea geometrică M' a punctului M (fig. 163).

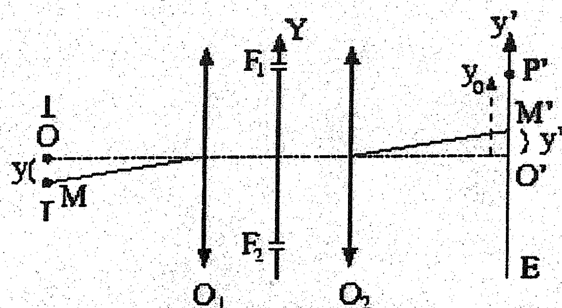


Fig. 163

La toate punctele fantei situate de aceeaşi parte a lui y corespund imagini identice care, prin suprapunere, formează un sistem de franje. Fiecărei linii izolate a fantei îi corespunde un sistem de franje şi, în particular, pentru cele trecând prin centrul O al fantei sursă, repartiţia corespunzătoare a iluminării pe ecranul E este:

$$D(y') = a^2 b^2 \frac{\sin^2 \dfrac{\pi u' a}{\lambda}}{\left(\dfrac{\pi u' a}{\lambda}\right)^2},$$

unde $u' = \sin\theta \approx \dfrac{y'}{F}$, iar b reprezintă lungimea fantelor F_1 şi F_2.

Prin urmare tabloul de interferenţă este *uni*dimensional, de aceea analiza poate fi efectuată numai în planul figurii. Considerând faptul că toate punctele surse S, necoerente între ele, participă la iluminarea observată pe ecranul E, să calculăm valoarea intensităţii $I_{P'}(y_0)$ în punctul P' de ordonată y_0 de pe ecran. Notăm cu $O(y')$ intensitatea în punctul M' a imaginii geometrice a fantei sursă f. Elementul-sursă dy' generează în punctul P' intensitatea:

$$O(y')D(y_0 - y')dy',$$

deci în punctul P', intensitatea este dată de produsul de convoluţie:

$$I_{P'}(y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} O(y')D(y_0 - y')dy'.$$

Dacă $i(\mu)$, $o(\mu)$ şi $d(\mu)$ reprezintă transformatele Fourier ale mărimilor $I_{P'}(y_0)$, $O(y')$, $D(y')$, atunci se poate scrie:

$$i(\mu) = o(\mu)d(\mu),$$

însă:

$$o(\mu) = \int_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} e^{i2\pi\mu y'} dy' = s\frac{\sin \pi\mu s}{\pi\mu s}$$

şi: $D(y') = AA^* = A^2$ deoarece amplitudinea A a câmpului difractat este reală.

Dar:

$$A = \frac{1}{F\lambda}\int f\left(\frac{Y}{F\lambda}\right) e^{i2\pi \frac{y'}{F\lambda} Y} dY,$$

unde funcţia $f\left(\dfrac{Y}{F\lambda}\right)$ caracterizează transmisia deschiderilor celor două fante F_1 şi F_2, Y fiind ordonata în planul deschiderii (fig. 163).

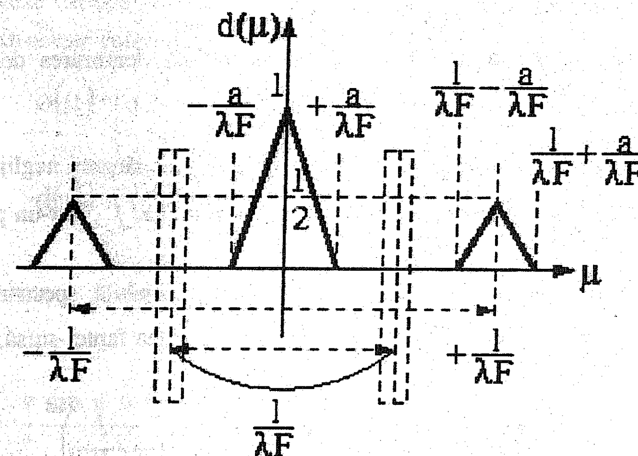


Fig. 164

Reciproca problemei este:

$$f\left(\frac{Y}{F\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-i\frac{2\pi y'}{F\lambda}} dy'$$

Această relaţie permite să se scrie:

$$\mathrm{d}(\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{Y}{F\lambda}\right) f\left(\mu-\frac{Y}{F\lambda}\right) d\left(\frac{Y}{F\lambda}\right).$$

Aceasta reprezintă funcţia de autocorelare relativă a celor două fante $f\left(\frac{Y}{F\lambda}\right)$ (fig. 164), fiind o funcţie reală şi pară.

Funcţia $\mathrm{d}(\mu)$ are valoare maximă dacă $\mu=0$, se anulează dacă $\mu=\pm\frac{a}{F\lambda}$ şi are valoarea $\mathrm{d}(\mu)=\frac{1}{2}$ dacă $\mu=\pm\frac{l}{F\lambda}$.

Prin urmare transformata Fourier a funcţiei $I_{P'}(y_0)$ este dată de produsul:

$$\mathrm{i}(\mu)=s\frac{\sin\pi\mu s}{\pi\mu s}\mathrm{d}(\mu).$$

In această expresie funcţia $\mathrm{d}(\mu)$ intervine ca un filtru pentru frecvețele spațiale ale obiectului în formă de fantă, spectrul său fiind:

$$s\frac{\sin\pi\mu s}{\pi\mu s}.$$

Funcţia $\mathrm{d}(\mu)$, prezentată în fig. 164, este cunoscută sub denumirea de *funcţie de transfer*.

b) Presupunem că fanta-sursă şi fantele F_1 şi F_2 au lărgimi neglijabile. Să se stabilească expresia intensităţii corespunzătoare imaginii fantei f, într-un punct P' al ecranului E.

R: Obiectul $O(y)$ fiind fanta f de lărgime neglijabilă, spectrul său $o(\mu)$ este caracterizat prin coeficientul b, proporţional cu lungimea fantei-sursă, şi se poate scrie: $\mathrm{i}(\mu)=b\,\mathrm{d}(\mu)$,

unde: $$\mathrm{d}(\mu)=\delta(\mu)+\frac{1}{2}\delta\left(\mu-\frac{l}{F\lambda}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(\mu+\frac{l}{F\lambda}\right).$$

Deoarece lăţimea fantelor F_1 şi F_2 tinde la zero, mărimea $\delta(\mu)$ reprezintă funcţia lui Dirac.

Iluminarea în imagine este descrisă de transformata Fourier inversă $\overline{F}[\mathrm{i}(\mu)]$:

$$I_{P'}(y_0)=b\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}(\mu)e^{-i2\pi\mu y_0}d\mu,$$

de unde:

$$I_{P'}(y_0)=b\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\mu)e^{-i2\pi\mu y_0}d\mu+$$

$$+\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(\mu-\frac{l}{F\lambda}\right)e^{-i2\pi\mu y_0}d\mu+\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(\mu+\frac{l}{F\lambda}\right)e^{+i2\pi\mu y_0}d\mu$$

Adică:

$$I_{P'}(y_0)=b\left[1+\frac{1}{2}\left(e^{-i2\pi\frac{ly_0}{F\lambda}}+e^{+i2\pi\frac{ly_0}{F\lambda}}\right)\right]=b\left(1+\cos 2\pi\frac{ly_0}{F\lambda}\right).$$

In acest mod s-a regăsit relaţia care descrie distribuţia intensităţii în tabloul de interferenţă din experimentul lui Young.

c) Se consideră că lăţimea fantei-sursă f are valoarea s iar lăţimea fantelor F_1 şi F_2 este neglijabilă. In aceste condiţii să se determine intensitatea în punctul P' şi să se analizeze variaţia contrastului tabloului de interferenţă funcţie de parametrul s.

R: In aceste condiţii:

$$o(\mu)=s\frac{\sin\pi\mu s}{\pi\mu s} \quad \text{şi} \quad \mathrm{i}(\mu)=s\frac{\sin\pi\mu s}{\pi\mu s}\mathrm{d}(\mu),$$

unde: $$\mathrm{d}(\mu)=\delta(\mu)+\frac{1}{2}\delta\left(\mu-\frac{l}{F\lambda}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(\mu+\frac{l}{F\lambda}\right).$$

Prin urmare:

$$\mathrm{i}(\mu)=s\frac{\sin\pi\mu s}{\pi\mu s}\delta(\mu)+$$

$$+\frac{s}{2}\frac{\sin\pi\mu s}{\pi\mu s}\delta\left(\mu-\frac{l}{F\lambda}\right)+\frac{s}{2}\frac{\sin\pi\mu s}{\pi\mu s}\delta\left(\mu+\frac{l}{F\lambda}\right)$$

Deci:

$$I_{P'}(y_0)=s\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\pi\mu s}{\pi\mu s}\delta(\mu)e^{-i2\pi\mu y_0}d\mu+$$

$$+\frac{s}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\pi\mu s}{\pi\mu s}\delta\left(\mu-\frac{l}{F\lambda}\right)e^{-i2\pi\mu y_0}d\mu+$$

$$+\frac{s}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\pi\mu s}{\pi\mu s}\delta\left(\mu+\frac{l}{F\lambda}\right)e^{+i2\pi\mu y_0}d\mu.$$

$$I_{P'}(y_0)=s+\frac{s}{2}\frac{\sin\pi\frac{ls}{F\lambda}}{\pi\frac{ls}{F\lambda}}e^{-i2\pi\frac{ly_0}{F\lambda}}+\frac{s}{2}\frac{\sin\pi\frac{ls}{F\lambda}}{\pi\frac{ls}{F\lambda}}e^{+i2\pi\frac{ly_0}{F\lambda}},$$

adică:

$$I_{P'}(y)=s\left(1+\frac{\sin\pi\frac{ls}{F\lambda}}{\pi\frac{ls}{F\lambda}}\cos2\pi\frac{ly_0}{F\lambda}\right).$$

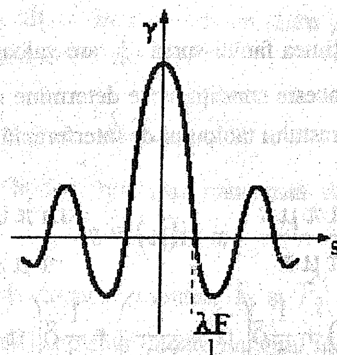


Fig. 165

Contrastul: $$|\gamma|=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}=\left|\frac{\sin\pi\frac{ls}{F\lambda}}{\pi\frac{ls}{F\lambda}}\right|.$$

Variația mărimii γ este prezentată în fig. 165. Mărimea γ reprezintă gradul de coerență complexă (spațială: $\gamma=\gamma_{12}(0)$) a lui F_1 și F_2.

Ultimul rezultat se poate interpreta în modul următor: pe aceeași figură (fig. 166), reprezentăm mărimea $d(\mu)$ și spectrul frecvențelor spațiale $o(\mu)$ al fantei sursă:

$$s\frac{\sin\pi\mu s}{\pi\mu s}.$$

Amplitudinea acestui spectru se anulează când $\mu=\frac{k}{s}$, unde $k=1,2,\cdots$, prima valoare nulă se obține pentru $\mu=\frac{1}{s}$.

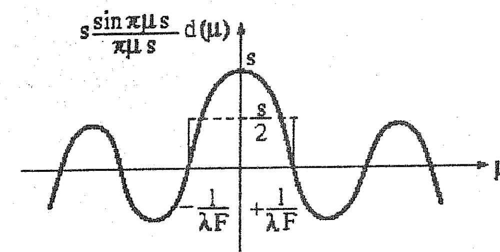


Fig. 166

Dacă este îndeplinită condiția exactă (în cazul figurii) $\frac{1}{s}=\frac{l}{F\lambda}$, pentru frecvența $\frac{l}{F\lambda}$ nu se obține nici un semnal, iar contrastul figurii de interferență este nul. Intr-adevăr, mărimea γ se anulează dacă $\frac{\pi l s}{F\lambda}=k\pi$, în particular pentru $k=1$:

$$\frac{1}{s}=\frac{l}{F\lambda},$$

iar toleranța asupra lărgimii sursei s pentru a obține un tablou de interferență caracterizat printr-o valoare mare a contrastului este:

$$s<\frac{F\lambda}{l}$$

De aceea se consideră: $$s\approx\frac{F\lambda}{2l}.$$

TIPARUL EXECUTAT LA
CENTRUL DE MULTIPLICARE AL
EDITURII UNIVERSITĂŢII „AL. I. CUZA"
6600 Iaşi, Str. Păcurari nr. 9, tel. 032-114947

Format: 70×100/16
Coli tipo: 15,25
Apărut: 2001
Comanda: 75

